

Федеральное государственное автономное образовательное  
учреждение высшего образования «Национальный  
исследовательский университет “Высшая школа экономики”

*На правах рукописи*

Кетков Сергей Сергеевич

**АНАЛИЗ ЗАДАЧИ ПОИСКА КРАТЧАЙШЕГО ПУТИ  
С НЕПОЛНОЙ ИНФОРМАЦИЕЙ И ОБУЧЕНИЕМ**

РЕЗЮМЕ

диссертации на соискание ученой степени кандидата  
компьютерных наук

Нижний Новгород - 2022

Диссертационная работа выполнена в федеральном государственном автономном образовательном учреждении высшего образования «Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики» в Лаборатории алгоритмов и технологий анализа сетевых структур.

Научные руководители:

- Калягин Валерий Александрович, профессор, НИУ ВШЭ, Нижний Новгород, Россия;
- Прокопьев Олег Александрович, профессор, университет Питтсбурга, США.

# Содержание

<b>1</b>	<b>Введение</b>	<b>3</b>
1.1	Тема диссертации и ее актуальность. . . . .	3
1.2	Связанная литература . . . . .	5
1.3	Наш подход и вклад . . . . .	8
1.4	Публикации и апробация подхода . . . . .	12
<b>2</b>	<b>Модель I: формулировка проблемы и подход к ее решению</b>	<b>13</b>
2.1	Одностадийная задача . . . . .	14
2.2	Многостадийная задача . . . . .	19
<b>3</b>	<b>Модель I: краткое изложение результатов вычислений</b>	<b>25</b>
3.1	Численный анализ одностадийной задачи . . . . .	25
3.2	Численный анализ многостадийной задачи . . . . .	28
<b>4</b>	<b>Модель II: формулировка проблемы и подход к ее решению</b>	<b>33</b>
4.1	Формулировка задачи . . . . .	33
4.2	Вычислительная сложность . . . . .	37
4.3	Базовый анализ стратегий пользователя . . . . .	38
<b>5</b>	<b>Модель II: краткое изложение результатов вычислений</b>	<b>41</b>
<b>6</b>	<b>Выводы</b>	<b>44</b>

# 1 Введение

## 1.1 Тема диссертации и ее актуальность.

В этом тезисе мы рассматриваем одно- и многоступенчатые формулировки задачи поиска кратчайшего пути (ЗПК), в которых либо стоимости/времени прохождения ребер в графе, либо структура самого графа подвержены неопределенности. Именно, мы рассмотрим следующие две альтернативные постановки задачи:

- **Модель I:** лицу, принимающему решения, заранее известна структура сети, но стоимости ребер/времени в пути подвержены неопределенности.
- **Модель II:** стоимости ребер/времени в пути детерминированы, но структура сети (например, существование некоторых ребер и их стоимость) подвержены неопределенности.

В обоих случаях мы формулируем проблему как динамическую или повторяющуюся игру с нулевой суммой между двумя лицами, принимающими решения, а именно *пользователем* и *злоумышленником*. Пользователь перемещается между двумя фиксированными вершинами в данной сети, в то время как злоумышленник неким предопределенным образом контролирует стоимости/веса ребер или их вероятностное распределение. Одно из лиц, принимающее решения, имеет неполную информацию о распределении весов ребер и/или структуре сети и пытается получить некоторую дополнительную информацию путем повторяющихся взаимодействий с другим лицом, принимающим решения.

Что касается первой модели, Модель I, время прохождения отдельных ребер обычно подвержено неопределенности из-за изменения пропускной способности дороги или условий дорожного движения. Кроме того, в ряде практических приложений стоимости ребер/времени в пути в данной сети можно наблюдать только с помощью конечного набора тренировочных данных [1].

Фактически, неопределенность во времени прохождения ребер может влиять на структуру и качество решений по построению маршрута; см. [2].

Первый возникающий вопрос в контексте Модели I заключается в том, как преобразовать имеющиеся данные для решения лежащей в основе задачи оптимизации. Эта проблема может быть решена, например, с помощью подхода *робастно - стохастической оптимизации (PCO)*, в котором распределение стоимостей ребер описывается *набором* или *семейством* распределений, которые согласуются с имеющимися данными; см., например, соответствующие исследования в [3, 4, 5, 6]. Учитывая некоторое семейство допустимых распределений, предполагается, что лицо, принимающее решение, оптимизирует некоторую меру риска при наихудшем возможном распределении неопределенных параметров. Иными словами, идея подхода PCO заключается в том, чтобы найти компромисс между отсутствием информации о распределении (как в робастной оптимизации [7, 8]) и полным знанием номинального распределения вероятностей (как в стохастическом программировании [9]).

Второй возникающий вопрос заключается в том, могут ли данные собираться пользователем динамически при перемещении по сети. В связи с этим мы рассматриваем многостадийную версию задачи поиска кратчайшего пути, в которой некоторая информация о распределении стоимостей может быть уточнена в конкретных вершинах пути пользователя. Другими словами, в отличие от одностадийной модели, в рассматриваемой многостадийной постановке задачи как пользователь, так и злоумышленник могут динамически корректировать свои решения. Наши результаты для Модели I могут быть найдены в работах [10] и [11] (вторая работа не опубликована и является препринтом).

Что касается второй модели, Модель II, мы фокусируемся на классе проблем перекрытия сети, в которых пользователь перемещается по сети (например, между двумя фиксированными вершинами, начальным и конечным пунктом), в то время как злоумышленник стремится нарушить в максимально возможной степени (или полностью остановить) перемещение пользователя по сети. Ключевая особенность нашей модели заключается в том, что

злоумышленник имеет неполную начальную информацию о сети, включая ее структуру и стоимости ребер, но получает эту информацию, наблюдая за действиями пользователя (т.е. за его путем) в каждой стадии принятия решений. Кроме того, в отличие от соответствующих исследований в [12, 13], мы рассматриваем точку зрения пользователя.

Элемент обучения в Модели II может быть мотивирован практическими постановками, в которых злоумышленник может наблюдать за действиями пользователя (например, с помощью спутника или беспилотника), но не может немедленно отреагировать на эти действия; см., например, [14]. В частности, мы предполагаем, что эта информационная обратная связь является детерминированной и идеальной, то есть злоумышленник узнает о существовании и точных стоимостях ребер, пройденных пользователем в предыдущие стадии принятия решений.

Как и для Модели I, Модель II может рассматриваться как в одно-, так и в многостадийной постановке. Для одной стадии принятия решений проблему можно рассматривать как *проблему запрета кратчайшего пути*; см., например, [15], где злоумышленник пытается максимизировать стоимость кратчайшего пути пользователя с учетом некоторых ограничений на ресурсы. В многостадийной модели, злоумышленник, наблюдая за путем пользователя, потенциально может обновить свою информацию о структуре сети и стоимостях ребер. По этой причине мы рассматриваем повторяющееся взаимодействие между пользователем и злоумышленником, при котором пользователь пытается минимизировать свои совокупные потери в течение нескольких стадий принятия решений. Наши результаты для Модели II могут быть найдены в работе [16].

## 1.2 Связанная литература

Что касается Модели I, в нескольких исследованиях рассматривается одностадийная версия робастно-стохастической задачи поиска кратчайшего пути (РСЗПК); см., например, [1, 17, 18, 19]. В частности, авторы рассматривают различные формы семейств распределений, включая семейства, основанные

на моментах первого и второго порядка [18, 19] и на метрике расстояния от эмпирического распределения данных [1].

Обычно в одностадийной РСЗПК пользователь выбирает путь вначале, до реализации неопределенности. Следовательно, проблему можно рассматривать как мин-макс задачу, в которой пользователь пытается минимизировать свои ожидаемые потери при наихудшем возможном распределении вектора стоимостей. Последние подходы к решению возникающих двухуровневых (мин-макс) задач основаны на результатах теории двойственности для задач с моментами [20, 21]. Другими словами, при некоторых предположениях о геометрии семейств распределений и функциональных свойствах целевой функции, одностадийная РСЗПК может быть преобразована либо в линейную, либо в нелинейную задачу смешанно-целочисленного программирования (ЗСЦП).

Также было показано, что РСО может быть применена к *динамическим* или, что эквивалентно, *многостадийным* задачам оптимизации, в которых решения должны адаптироваться к постепенно возникающей новой информации о распределении; см., например, [5, 6, 22, 23]. В общем, многостадийные задачи РСО являются вычислительно сложными, поскольку решения могут быть смоделированы как произвольные функции неопределенных параметров [21, 24]. Насколько нам известно, многостадийная РСЗПК рассматривается относительно небольшим числом авторов и только как частный случай общей ЗСЦП; см., например, [22, 25].

В заключение мы хотели бы сослаться на многостадийную модель перекрытия кратчайшего пути, предложенную Сефаиром и др. [26] и многостадийную робастную постановку ЗСЦП Берцимаса и Даннинга [27]. Несмотря на то, что эти модели являются детерминированными, они предоставляют некоторые интересные идеи для многостадийной РСЗПК, рассматриваемой в текущей диссертации.

В частности, в [26] злоумышленник может перекрывать некоторое подмножество ребер в любое время, когда пользователь достигает определенной вершины. После этого пользователь может ответить, динамически изменяя

свой путь. Естественным образом, задача представляет из себя несколько этапов, где на каждом этапе злоумышленник перекрывает подмножество ребер, исходящих из текущей позиции пользователя, а пользователь выбирает последующую вершину своего пути. Кроме того, общее количество ребер, которые могут быть перекрыты злоумышленником, ограничено сверху бюджетом злоумышленника. В данной работе, схожим образом с постановкой задачи в [26], мы вводим *вспомогательные вероятностные ограничения*, связанные с ребрами, исходящими из текущей позиции пользователя.

В модели Берцимаса и Даннинга [27] известно, что неопределенные параметры задачи принадлежат некоторому полиэдральному множеству неопределенности. Это множество разбивается на ряд непересекающихся полиэдров, и предполагается, что решение задачи является кусочно-постоянной функцией на сгенерированных подмножествах. Такой подход к моделированию позволяет получать аппроксимации многостадийной задачи, где качество аппроксимации регулируется выбором соответствующей схемы разбиения. В дальнейшем мы продемонстрируем, что в нашей многостадийной формулировке задачи поиска кратчайшего пути аналогичная кусочно-постоянная конструкция правил принятия решений возникает естественным образом из-за вспомогательных вероятностных ограничений, наблюдаемых пользователем при перемещении по сети.

Что касается Модели II, задачи перекрытия формируют широкий класс задач детерминированной и стохастической оптимизации с приложениями, в основном возникающими в военных и правоохранительных приложениях, а также в контексте борьбы с инфекционными заболеваниями, см. обзоры в [28, 29, 30, 31, 32] и ссылки в них. При этом задачи перекрытия сети в основном рассматривают позицию злоумышленника. Другими словами, злоумышленник обычно рассматривается как лидер, в то время как пользователь играет роль последователя в рассматриваемой игре.

В то время как большинство исследований в литературе по перекрытию сети рассматривают детерминированные постановки, в ряде более поздних работ проблема рассматривается в стохастической постановке; см., например,



[33, 34] и обзор в [35]. Обычно такие модели предполагают, что либо результаты действий злоумышленника неопределенны, либо существует неопределенность в отношении действий пользователя.

Наша многостадийная модель перекрытия сети мотивирована и основана на недавних работах Борреро и др. [12, 13]. В частности, в сетевой модели [12] злоумышленник и пользователь взаимодействуют последовательно в течение нескольких периодов (или стадий) принятия решений. В каждой стадии злоумышленник может блокировать не более  $k$  ребер на время этой стадии, в то время как пользователь следует жадной стратегии, т.е. в каждом раунде проходит по кратчайшему пути между двумя фиксированными вершинами в перекрытой злоумышленником сети. Наблюдая за решениями пользователя, злоумышленник может обновить свою информацию о структуре сети и стоимости ребер, пройденных пользователем.

Авторы в [12] показывают, что *жадные стратегии злоумышленника* обладают рядом привлекательных теоретических свойств в вышеупомянутой многостадийной постановке задачи. В дополнение к этим свойствам, результаты вычислительных экспериментов в [12] также подтверждают превосходство жадной стратегии злоумышленника над рядом других эталонных стратегий. Наконец, в [13] авторы обобщают теоретические результаты и жадные стратегии злоумышленника из [12] на более широкий класс задач линейного смешенно-целочисленного программирования.

### 1.3 Наш подход и вклад

**Модель I.** Следуя исследованию Виземана и др. [4], мы предполагаем, что семейство допустимых распределений в нашей постановке описывается некоторыми ограничениями на моменты первого порядка для подмножеств ребер и индивидуальными вероятностными ограничениями для конкретных ребер. Мы утверждаем, что в отличие от семейств распределений, основанных на моментах первого и второго порядка [3] или на метрике расстояния от эмпирического распределения [36, 37], наши вероятностные ограничения допускают неполное знание набора обучающих данных. Наш вклад для *одностадийной*

модели РСЗПК можно резюмировать следующим образом:

- Мы демонстрируем, что наши вероятностные ограничения могут быть построены единым образом на основе наблюдений за реальными данными.
- Мы показываем, что задача без ограничений на моменты первого порядка полиномиально разрешима и определяем форму наилучшего распределения в данном конкретном случае.
- В общем случае и, в отличие от исследований в [18, 19], мы получаем робастные и линейные смешанно-целочисленные переформулировки одностадийной РСЗПК.
- Мы проводим численное исследование предложенного подхода и приводим сравнение с некоторыми стандартными робастными и робастно-стохастическими методами оптимизации.

В *многостадийной* формулировке РСЗПК мы пытаемся ответить на следующие исследовательские вопросы:

- Q1.** *Есть ли польза для пользователя в изменении выбранного пути, если он наблюдает некоторую дополнительную информацию о распределении во время прохождения по сети?*
- Q2.** *Какую выгоду может получить пользователь, используя такие адаптивные решения?*
- Q3.** *Может ли полученная многостадийная формулировка быть решена с использованием готовых программных пакетов для ЗСЦП?*

Мы пытаемся учесть динамическое раскрытие информации о распределении, вводя некоторые *вспомогательные вероятностные ограничения*, которые могут быть проверены в определенных вершинах пути пользователя.

Проще говоря, пользователь формирует список вспомогательных ограничений *в начале игры*. Затем для каждого ограничения в списке злоумышленник решает, удовлетворено оно или нет, и раскрывает свой ответ, т.е. “да” или “нет”, пользователю, как только пользователь достигает соответствующей вершины в сети.

Наш вклад для многостадийной модели можно резюмировать следующим образом:

- Мы описываем два класса ограничений, связанных с упреждением, для многостадийной РСЗПК, для ациклических и общих графов соответственно. Эти ограничения подтверждают, что решение пользователя на текущем этапе не может зависеть от будущих ответов злоумышленника.
- При некоторых мягких допущениях мы формулируем многостадийную РСЗПК как одну потенциально большую линейную ЗСЦП. Эти результаты отвечают на наш исследовательский вопрос **Q3**.
- Полученная переформулировка используется в нашем численном исследовании, где проверяется ее вычислительная сложность и качество адаптивных решений. Следовательно, мы обращаемся к исследовательским вопросам **Q1** и **Q2**.
- С практической точки зрения, мы демонстрируем, что вспомогательные ограничения могут быть проверены в режиме онлайн, используя информацию от некоторых датчиков Bluetooth, размещенных в определенных вершинах сети.

**Модель II.** В отличие от Модели I, мы предполагаем, что стоимости ребер/время в пути в Модели II являются детерминированными, но злоумышленник имеет неполную информацию о структуре сети и некоторых стоимостях. Наблюдая за путями, которые проходит пользователь, злоумышленник может узнать о существовании и точной стоимости конкретных ребер и скорректировать свои решения в последующие стадии принятия решений.

Как отмечалось ранее, исследования в [12, 13], как и большинство соответствующей литературы по перекрытиям сети, рассматривают позицию злоумышленника. Однако, принимая во внимание ряд привлекательных теоретических свойств жадных стратегий злоумышленника, представляется интересным исследовать оптимальные стратегии пользователя в предположении, что злоумышленник следует наивной жадной стратегии в каждой стадии принятия решений. Мы приводим следующие исследовательские вопросы:

- Q1'**. Если мы предположим, что злоумышленник жадный, каковы хорошие стратегические решения для пользователя по отношению с описанной жадной стратегии злоумышленника?
- Q2'**. Обладают ли такие решения/стратегии пользователя какими-либо интересными структурными свойствами и как они могут быть сконструированы?
- Q3'**. Являются ли эти стратегии более предпочтительными для пользователя, чем наивная жадная стратегия, основанная на выборе кратчайшего пути?

Наш вклад для Модели II можно резюмировать следующим образом:

- Мы показываем, что проблема пользователя является  $NP$ -трудной даже в случае двух стадий принятия решений. Этот результат установлен для сетей, где проблема перекрытия  $k$  наиболее значимых ребер полиномиально разрешима.
- Мы демонстрируем, что при некотором дополнительном предположении оптимальное решение пользователя в случае двух стадий принятия решений является либо жадным, либо состоит из двух различных путей, которые пересекаются с общим кратчайшим путем. Таким образом, мы обращаемся к исследовательским вопросам **Q1'** и **Q2'**.
- Описанные теоретические свойства используются для разработки эвристического алгоритма для пользователя при более общих условиях.

- Полученные результаты вычислений демонстрируют превосходство предложенного эвристического подхода по отношению к наивной жадной стратегии пользователя для нескольких классов тестовых примеров и типов обратной связи, получаемой злоумышленником. Таким образом, мы решаем исследовательский вопрос **Q3'**.

## 1.4 Публикации и апробация подхода

Результаты этой работы опубликованы в ряде научных статей в международных рецензируемых журналах.

### Основные публикации:

- Sergey S. Ketkov, Oleg A. Prokopyev, On Greedy and Strategic Evaders in Sequential Interdiction Settings with Incomplete Information, *Omega*, 92, 102161 (2020), **Q1**;
- Sergey S. Ketkov, Oleg A. Prokopyev, Evgenii P. Burashnikov, An approach to the distributionally robust shortest path problem, *Computers & Operations Research*, 130, 105212 (2021), **Q2**.

### Другие публикации:

- Sergey S. Ketkov, On the multi-stage shortest path problem under distributional uncertainty, *arXiv preprint arXiv:2205.09200* (2022).

**Личный вклад автора диссертации.** Автор диссертации провел доказательство основных теоретических результатов, сбор данных, эксперименты, проанализировал и интерпретировал результаты экспериментов, написал текст работы. В первой и второй работах научному руководителю, О.А. Прокопьеву, принадлежат некоторые идеи постановок задач, помощь в редактировании текста и ответах на замечания рецензентов. Соавтором второй работы, Е.П. Бурашниковым, представлены идеи некоторых экспериментов и даны комментарии, которые позволили улучшить качество работы.

### Доклады на конференциях и семинарах:

- Mathematical Optimization Theory and Operations Research, Новосибирск, 6 – 10 июля 2020 г., устный доклад “An approach to the distributionally robust shortest path problem”;
- Mathematical Optimization Theory and Operations Research, Иркутск, 4–10 июля 2021 г., устный доклад “On a class of data-driven combinatorial optimization problems under uncertainty: a distributionally robust approach”;
- Научный семинар Лаборатории алгоритмов и технологий для анализа сетевых структур, 29.04.2020, устный доклад “On the multi-stage distributionally robust shortest path problem”;
- 12 Международная конференция по сетевому анализу NET 2022, 23 – 25 мая 2022, устный доклад “On the multi-stage shortest path problem under distributional uncertainty”;
- 7 Международная конференция по сетевому анализу, Нижний Новгород, май 2017 г., устный доклад “Evader’s models in sequential network interdiction”;
- Modern Problems in Mathematics and its Applications, Екатеринбург, 4 – 10 февраля 2018 г., устный доклад “On a Strategic Evader in Sequential Interdiction with Incomplete Information”.

## 2 Модель I: формулировка проблемы и подход к ее решению

**Обозначения.** Все векторы и матрицы обозначены жирными буквами. Для сети  $G := (N, A, \mathbf{c})$  мы обозначаем через  $N$  и  $A$  ее наборы вершин и направленных ребер соответственно, тогда как  $\mathbf{c}$  - это неотрицательный вектор стоимостей ребер. Для каждой вершины  $i \in N$  мы обозначаем как  $RS_i$  ( $FS_i$ ) множества ребер, направленных из (и в) вершину  $i$ . Кроме того, пусть  $s \in N$

и  $f \in N$  - стартовая и финишная вершины, а  $\mathcal{P}_{sf}(G)$  - множество всех простых путей от  $s$  до  $f$  в сети  $G$ . Любой путь  $P \in \mathcal{P}_{sf}(G)$  задается последовательностью ребер  $(s, v_1), (v_1, v_2), \dots, (v_{|P|-1}, f)$ , которую мы записываем как  $\{s \rightarrow v_1 \rightarrow \dots \rightarrow v_{|P|-1} \rightarrow t\}$  для удобства.

Пространство всех распределений вероятностей на  $\mathbb{R}^m$  для некоторого  $m \in \mathbb{Z}_{>0}$  обозначается как  $\mathcal{Q}_0(\mathbb{R}^m)$ . Для каждого  $a \in A$  мы обозначаем через  $\mathbb{Q}_a \in \mathcal{Q}_0(\mathbb{R})$  маргинальные распределения, индуцированные некоторым совместным распределением вероятностей  $\mathbb{Q} \in \mathcal{Q}_0(\mathbb{R}^{|A|})$ .

## 2.1 Одностадийная задача

Мы рассматриваем ориентированный взвешенный связный граф  $G := (N, A, \mathbf{c})$ , где набор всех возможных векторов инцидентности путей задается как:

$$Y = \left\{ \mathbf{y} \in \{0, 1\}^{|A|} : \sum_{a \in FS_i} y_a - \sum_{a \in RS_i} y_a = \begin{cases} 1, & \text{if } i = s \\ -1 & \text{if } i = f \\ 0, & \text{иначе} \end{cases} \quad \forall i \in N \right. \quad (1a)$$

$$\left. \sum_{a \in FS_i} y_a \leq 1 \quad \forall i \in N \right\} \quad (1b)$$

Ограничения (1a) относятся к стандартным ограничениям сохранения потока, тогда как ограничения (1b) гарантируют, что пользователь посещает каждую вершину не более одного раза. Поскольку вектор стоимостей неотрицателен по построению, последнее условие представляет интерес только для многостадийной РСЗПК; см. наше предположение **A5** в разделе 2.2.

Мы предполагаем, что пользователь располагает следующей частичной информацией о распределении  $\mathbb{Q}$  вектора стоимостей  $\mathbf{c}$ . Во-первых, стоимости отдельных ребер  $a \in A$  подчиняются *индивидуальным вероятностным ограничениям* вида:

$$\mathbb{Q}\{c_a \in [l_a^{(j)}, u_a^{(j)}]\} \in [\underline{q}_a^{(j)}, \bar{q}_a^{(j)}] \quad \forall j \in \mathcal{D}_a, a \in A, \quad (2)$$

где  $[l_a^{(j)}, u_a^{(j)}] \subseteq [l_a, u_a]$ ,  $j \in \mathcal{D}_a = \{1, \dots, d_a\}$  - конечное множество подинтервалов;  $\underline{q}_a^{(j)}$  и  $\bar{q}_a^{(j)}$  принадлежат интервалу  $[0, 1]$  и ограничивают вероятность того, что случайная величина  $c_a$  принадлежит  $i$ -му подинтервалу. В частности, мы предполагаем, что для каждого  $a \in A$  и  $j = 1$  ограничения

$$\mathbb{Q}\{c_a \in [l_a^{(j)}, u_a^{(j)}]\} \in [\underline{q}_a^{(j)}, \bar{q}_a^{(j)}]$$

являются ограничениями на множество значений с  $l_a^{(j)} = l_a$ ,  $u_a^{(j)} = u_a$  и  $\underline{q}_a^{(j)} = \bar{q}_a^{(j)} = 1$  для некоторых  $l_a, u_a \in \mathbb{R}_{>0} \cup \{0\}$ .

В конце-концов, для вещественной матрицы  $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{|A| \times k}$  и вектора  $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^k$ ,  $k \in \mathbb{Z}_+$ , мы вводим линейные ограничения на математическое ожидание вида:

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\{\mathbf{B}\mathbf{c}\} \leq \mathbf{b} \quad (3)$$

Таким образом, предполагается, что распределение  $\mathbb{Q}$  вектора стоимостей  $\mathbf{c}$  принадлежит семейству распределений  $\mathcal{Q}$ , образованному всеми распределениями, которые удовлетворяют вероятностным ограничениям (2) и (3), т.е.,

$$\mathcal{Q} := \left\{ \mathbb{Q} \in \mathcal{Q}_0(\mathbb{R}^{|A|}) : \mathbb{Q} \text{ удовл. ограничениям (2) и (3)} \right\} \quad (4)$$

Путем введения линейной функции потерь  $\ell(\mathbf{c}, \mathbf{y}) := \mathbf{c}^\top \mathbf{y}$  мы получаем одностадийную или статическую версию РСЗПК:

$$z_{static}^* := \min_{\mathbf{y} \in Y} \max_{\mathbb{Q} \in \mathcal{Q}} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\{\mathbf{c}^\top \mathbf{y}\}, \quad (\mathbf{F}_{os})$$

где набор допустимых решений  $Y$  и семейство распределений  $\mathcal{Q}$  задаются уравнениями (1) и (4) соответственно.

Кроме того, мы делаем следующие предположения:

**A1.** Как пользователь, так и злоумышленник имеют полную информацию об исходном семействе распределений  $\mathcal{Q}$  и структуре графа  $G$ .

**A2.** Для каждого  $a \in A$  существует маргинальное распределение  $\mathbb{Q}_a \in$



$\mathcal{Q}_0(\mathbb{R})$  такое, что

$$\mathbb{Q}_a\{l_a^{(i)} \leq c_a \leq u_a^{(i)}\} \in (\underline{q}_a^{(i)}, \bar{q}_a^{(i)}),$$

при условии, что  $\underline{q}_a^{(i)} < \bar{q}_a^{(i)}$ ,  $i \in \mathcal{D}_a$ .

**A3.** Для каждого  $a \in A$  и любой пары подинтервалов в (2), а именно,  $[l_a^{(i_1)}, u_a^{(i_1)}]$  и  $[l_a^{(i_2)}, u_a^{(i_2)}]$ ,  $i_1, i_2 \in \mathcal{D}_a$ , мы имеем  $l_a^{(i_1)} \neq u_a^{(i_2)}$  и  $l_a^{(i_2)} \neq u_a^{(i_1)}$ .

В предположении **A1** мы считаем, что у пользователя есть некоторая начальная информация о распределении вектора стоимостей. Например, эта информация может быть собрана заранее, используя некоторые исторические данные. Предположение **A2** совпадает с соответствующим предположением, сделанным Виземаном и др. [4] и служит условием регулярности для задач с моментами [21]. Наконец, предположение **A3** гарантирует, что задача второго уровня в  $(\mathbf{F}_{os})$  имеет конечный максимум. Можно также утверждать, что предположение **A3** является скорее техническим, поскольку, если, например,  $l_a^{(i_1)} = u_a^{(i_2)}$  для некоторых  $i_1, i_2 \in \mathcal{D}_a$ , то достаточно небольшое возмущение конечных точек делает это предположение выполненным.

Сначала мы рассмотрим одностадийную формулировку  $(\mathbf{F}'_{os})$  без ограничений на математические ожидания (3), т.е.,

$$\min_{\mathbf{y} \in Y} \max_{\mathbb{Q} \in \tilde{\mathcal{Q}}} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\{\mathbf{c}^\top \mathbf{y}\}, \quad (\mathbf{F}'_{os})$$

где

$$\tilde{\mathcal{Q}}_a := \left\{ \mathbb{Q}_a \in \mathcal{Q}_0(\mathbb{R}): \mathbb{Q}_a\{c_a \in [l_a^{(i)}, u_a^{(i)}]\} \in [\underline{q}_a^{(i)}, \bar{q}_a^{(i)}] \quad \forall i \in \mathcal{D}_a \right\}$$

и

$$\tilde{\mathcal{Q}} := \left\{ \mathbb{Q} \in \mathcal{Q}_0(\mathbb{R}^{|A|}) : \mathbb{Q}_a \in \tilde{\mathcal{Q}}_a \right\} \quad (5)$$

Мы доказываем, что полученная задача может быть решена путем решения задач линейного программирования для каждого  $a \in A$  и одной детерминированной задачи поиска кратчайшего пути.

Для простоты нашего дальнейшего изложения нам нужен следующий шаг

предварительной обработки. Для каждого ребра  $a \in A$  из базового набора подинтервалов  $[l_a^{(i)}, u_a^{(i)}]$ ,  $i \in \mathcal{D}_a$  мы формируем набор  $[L_a^{(j)}, U_a^{(j)}]$ ,  $j \in \mathcal{W}_a := \{1, \dots, W_a\}$ , из  $W_a \in \mathbb{Z}_+$  элементарных подинтервалов [38]. В частности, мы формируем список различных конечных точек интервалов, то есть,

$$\{l_a^{(1)}, u_a^{(1)}, l_a^{(2)}, u_a^{(2)}, \dots, l_a^{(D_a)}, u_a^{(D_a)} = l_a, u_a^{(D_a)} = u_a\}$$

и сортируем их в порядке неубывания. Области результирующего разбиения интервала  $[l_a, u_a]$  называются элементарными подинтервалами и обозначаются как  $[L_a^{(j)}, U_a^{(j)}]$ ,  $j \in \mathcal{W}_a$ . Для любого  $i \in \mathcal{D}_a$  мы обозначаем через  $\mathcal{W}_a(i) \subseteq \mathcal{W}_a$  индексы элементарных подинтервалов, содержащихся в базовом подинтервале  $[l_a^{(i)}, u_a^{(i)}]$ .

**Теорема 1** *Предположим, что  $\mathbf{y}^* \in Y$  и  $\mathbb{Q}^{(w)} \in \mathcal{Q}_0(\mathbb{R}^{|A|})$  - это оптимальное решение  $(\mathbf{F}'_{os})$ . Тогда*

- для каждого  $a \in A$  наихудшая ожидаемая стоимость  $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}_a^{(w)}}\{c_a\}$  совпадает с оптимальным значением целевой функции следующей задачи линейного программирования:

$$\max_{\delta_a} \sum_{j \in \mathcal{W}_a} U_a^{(j)} \delta_{aj} \quad (6a)$$

$$\text{s.t. } \delta_{aj} \geq 0 \quad \forall j \in \mathcal{W}_a \quad (6b)$$

$$\sum_{j \in \mathcal{W}_a} \delta_{aj} = 1 \quad (6c)$$

$$\underline{q}_a^{(i)} \leq \sum_{j \in \mathcal{W}_a(i)} \delta_{aj} \leq \bar{q}_a^{(i)}, \quad \forall i \in \mathcal{D}_a \setminus \{1\} \quad (6d)$$

- оптимальный вектор инцидентности пути  $\mathbf{y}^*$  может быть найден путем решения детерминированной задачи поиска кратчайшего пути вида:

$$\min_{\mathbf{y} \in Y} \sum_{a \in A} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}_a^{(w)}}\{c_a\} y_a \quad (7)$$

Идея доказательства теоремы 1 состоит в том, чтобы рассмотреть наилучшие ожидаемые значения стоимостей для каждого ребра  $a \in A$ , а затем переформулировать полученные задачи о моментах, используя сильную двойственность [21] и некоторые свойства элементарных подинтервалов.

Далее мы рассмотрим общую одностадийную РСЗПК ( $\mathbf{F}_{os}$ ) как с вероятностными ограничениями (2), так и с линейными ограничениями на математическое ожидание (3). Оказывается, что РСЗПК ( $\mathbf{F}_{os}$ ) может быть преобразована в робастную задачу поиска кратчайшего пути с некоторым полиэдральным множеством неопределенности. Именно, справедлив следующий результат.

**Теорема 2** *Предположим что*

$$\mathcal{S}_0 := \{\bar{\mathbf{c}} \in \mathbb{R}^{|A|} : \mathbf{L} \leq \bar{\mathbf{c}} \leq \mathbf{U}; \quad \mathbf{B}\bar{\mathbf{c}} \leq \mathbf{b}\},$$

где для каждого  $a \in A$

$$L_a := \min_{\mathbb{Q}_a \in \tilde{\mathcal{Q}}_a} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}_a} \{c_a\}, \quad (8a)$$

$$U_a := \max_{\mathbb{Q}_a \in \tilde{\mathcal{Q}}_a} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}_a} \{c_a\}, \quad (8b)$$

и

$$\tilde{\mathcal{Q}}_a := \left\{ \mathbb{Q}_a \in \mathcal{Q}_0(\mathbb{R}) : \mathbb{Q}_a \{c_a \in [l_a^{(i)}, u_a^{(i)}]\} \in [\underline{q}_a^{(i)}, \bar{q}_a^{(i)}] \quad \forall i \in \mathcal{D}_a \right\}$$

Тогда робастно-стохастическая задача поиска кратчайшего пути вида ( $\mathbf{F}_{os}$ ) эквивалентна следующей робастной задаче с полиэдральным множеством неопределенности:

$$\min_{\mathbf{y} \in Y} \max_{\bar{\mathbf{c}} \in \mathcal{S}_0} \bar{\mathbf{c}}^\top \mathbf{y} \quad (9)$$

Фактически, мы доказываем, что для каждого  $a \in A$  существует *сюръективное отображение* из множества маргинальных распределений вероятностей  $\tilde{\mathcal{Q}}_a$ , заданного уравнением (5), на множество, образованное линейными

ограничениями на математическое ожидание

$$L_a \leq \mathbb{E}_{\mathbb{Q}_a} \{c_a\} \leq U_a \quad (10)$$

Кроме того, с учетом теоремы 2, мы можем сформулировать одностадийную задачу ( $\mathbf{F}_{os}$ ) как линейную ЗСЦП путем дуализации задачи линейного программирования второго уровня в (9). Формально справедливо следующее утверждение.

**Утверждение 1** Пусть

$$\mathcal{S}_0 := \left\{ \bar{\mathbf{c}} \in \mathbb{R}^{|A|} : \mathbf{L} \leq \bar{\mathbf{c}} \leq \mathbf{U}; \quad \mathbf{B}\bar{\mathbf{c}} \leq \mathbf{b} \right\} = \left\{ \bar{\mathbf{c}} \in \mathbb{R}^{|A|} : \mathbf{B}_0\bar{\mathbf{c}} \leq \mathbf{b}_0 \right\} \quad (11)$$

Тогда одностадийная РСЗПК ( $\mathbf{F}_{os}$ ) допускает следующую линейную смешанно-целочисленную переформулировку:

$$z_{static}^* = \min_{\mathbf{y}, \boldsymbol{\lambda}} \left\{ \mathbf{b}_0^\top \boldsymbol{\lambda} : \boldsymbol{\lambda} \geq 0, \quad -\mathbf{y} + \mathbf{B}_0^\top \boldsymbol{\lambda} = 0, \quad \mathbf{y} \in Y \right\} \quad (12)$$

Линейная задача СЦП (12), в свою очередь, может быть решена с помощью готового программного обеспечения. В следующем разделе мы используем результаты теорем 1 и 2, чтобы вывести линейную смешанно-целочисленную формулировку связанной многостадийной задачи.

## 2.2 Многостадийная задача

Напомним, что в нашей многостадийной формулировке пользователю разрешается наблюдать некоторую дополнительную информацию о распределении во время прохождения по графу  $G$ . В связи с этим мы делаем следующие дополнительные предположения:

**A4.** В дополнение к исходным вероятностным ограничениям в  $\mathcal{Q}$  пользователь формирует список  $\mathcal{L}$  вспомогательных вероятностных ограниче-

ний:

$$\mathcal{L} := \bigcup_{i \in N \setminus \{f\}} \left\{ \mathbb{Q}_a \{c_a \in [\tilde{l}_a^{(j)}, \tilde{u}_a^{(j)}]\} \leq \tilde{q}_a^{(j)} \quad \forall j \in \tilde{\mathcal{D}}_a, \forall a \in FS_i; \right. \quad (13a)$$

$$\left. \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left\{ \sum_{a \in FS_i} p_{ja} c_a \right\} \leq p_{j0} \quad \forall j \in \tilde{\mathcal{K}}_i \right\}, \quad (13b)$$

где,  $\tilde{\mathcal{D}}_a = \{1, \dots, \tilde{d}_a\}$ ,  $a \in A$ , и  $\tilde{\mathcal{K}}_i = \{1, \dots, \tilde{k}_i\}$ ,  $i \in N \setminus \{f\}$ , являются потенциально пустыми множествами индексов.

**A5.** Каждая вершина  $i \in N$  посещается пользователем не более одного раза.

Предположение **A4** указывает, что вероятностные ограничения в  $\mathcal{Q}$  и вспомогательные ограничения имеют одинаковую форму. Мы также демонстрируем, что предположение **A4** необходимо для получения линейной смешанно-целочисленной формулировки предлагаемой многостадийной задачи. Что касается предположения **A5**, можно утверждать, что, если пользователь возвращается в вершину несколько раз, то злоумышленник может просто изменить номинальное распределение стоимостей ребер. В этой ситуации пользователь не сможет использовать ранее собранную информацию о распределении, и, следовательно, пользователю невыгодно посещать вершины несколько раз.

В следующем примере мы предоставляем некоторую интуицию, лежащую в основе вспомогательных вероятностных ограничений (13), а также первого и второго исследовательских вопросов, **Q1** и **Q2**, описанных в разделе 1.3.

**Пример 1** Мы рассмотрим граф  $G$ , приведенный на рисунке 1 с  $s = 1$  и  $f = 8$ . Предполагается, что стоимости ребер удовлетворяют ограничениям на множество значений  $l_a \leq c_a \leq u_a$ , указанным на каждом ребре, т.е.  $c_a \in [l_a, u_a]$  с вероятностью 1. Кроме того, мы вводим одно линейное ограничение на математические ожидания вида:

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left\{ \sum_{a \in A'} c_a \right\} \leq 1, \quad (14)$$

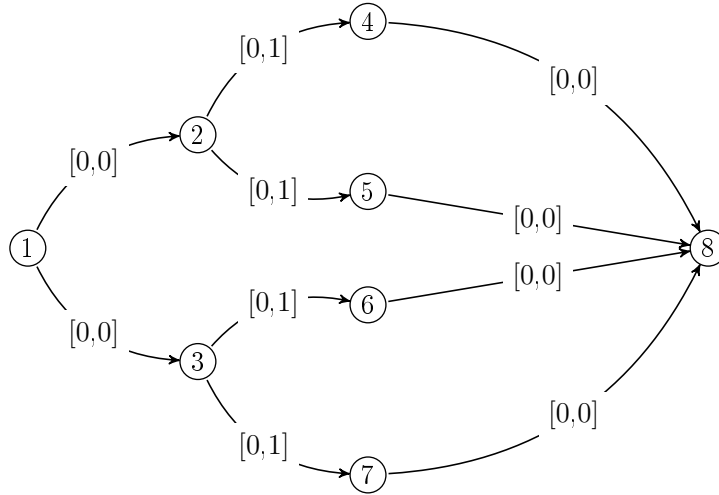


Рис. 1: Граф, который используется в примере 1. Диапазон стоимостей указан на каждом ребре.

где  $A' := \{(2, 4), (2, 5), (3, 6), (3, 7)\}$ . Далее мы рассмотрим три разных случая в отношении дополнительной информации о распределении, *наблюдаемой пользователем*:

- **Случай 1 (без дополнительной информации)**. Если пользователь выбирает путь *первым*, то он не может наблюдать какую-либо дополнительную информацию о распределении. Ожидаемые потери, понесенные пользователем в наихудшем случае, равны 1.
- **Случай 2 (полная информация)**. Пользователь выбирает путь *после* того, как злоумышленник раскрывает фактическое распределение стоимостей ребер,  $\mathbb{Q}$ . Тогда ожидаемые потери пользователя в наихудшем случае равны 0.25.
- **Случай 2 (последовательное раскрытие информации)**. Предположим, что, если пользователь находится в вершине 2, то он может сравнить ожидаемые стоимости ребер (2, 4) и (2, 5). Другими словами, злоумышленник указывает, выполняется ли следующее ограничение на математические ожидания или нет:

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\{c_{(2,4)} - c_{(2,5)}\} \leq 0$$

В этом случае наилучший ожидаемые потери, понесенные пользователем, равны 0.5.

Сравнивая первый и третий случаи, мы приходим к выводу, что пользователь может извлечь выгоду из использования динамических решений.  $\square$

Мы кодируем все возможные ответы злоумышленника на ограничения в  $\mathcal{L}$  двоичными векторами  $\mathbf{r}_j \in \{0, 1\}^{|\mathcal{L}|}$  для  $j \in \{1, \dots, 2^{|\mathcal{L}|}\}$ . В частности,  $r_{jm} = 1$ , если выполнено  $m$ -е ограничение в  $\mathcal{L}$  и  $r_{jm} = 0$ , в противном случае. Кроме того, пусть

$$\mathcal{Q}_j := \mathcal{Q} \cap \left\{ \mathbb{Q} \in \mathcal{Q}_0(\mathbb{R}^{|\mathcal{A}|}) \text{ s.t.} \right. \\ \left. \begin{cases} m\text{-е ограничение в } \mathcal{L}, \text{ если } r_{jm} = 1 \\ \text{противоположное к } m\text{-му ограничению в } \mathcal{L}, \text{ если } r_{jm} = 0 \end{cases} \right\}$$

Независимо от порядка вспомогательных вероятностных ограничений в  $\mathcal{L}$ , многостадийная РСЗПК может быть сформулирована следующим образом:

$$\begin{aligned} \max_{j \in \{1, \dots, 2^{|\mathcal{L}|}\}} \min_{\mathbf{y}_j \in Y} \max_{\mathbb{Q}_j \in \mathcal{Q}_j} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}_j} \{ \mathbf{c}^\top \mathbf{y}_j \} \\ \text{s.t. упреждающие ограничения для } \mathbf{y}_j, j \in \{1, \dots, 2^{|\mathcal{L}|}\}, \end{aligned} \quad (\mathbf{F}_{ms})$$

где  $\mathbf{y}_j, j \in \{1, \dots, 2^{|\mathcal{L}|}\}$ , обозначает решение пользователя при полном знании вектора ответов злоумышленника,  $\mathbf{r}_j$ . Таким образом, пользователь пытается минимизировать свои ожидаемые потери в наихудшем случае при всех возможных реализациях ответов злоумышленника и с учетом некоторых *ограничений, связанных с упреждением*.

Нам необходимо наложить упреждающие ограничения, поскольку пользователь узнает ответы злоумышленника, связанные с некоторой вершиной  $i \in N \setminus \{f\}$ , только если он достигает вершины  $i$ . Следовательно, для любых фиксированных  $j, \ell \in \{1, \dots, 2^{|\mathcal{L}|}\}$  пути пользователя  $P_j$  и  $P_\ell$  (определенные векторами инцидентности  $\mathbf{y}_j$  и  $\mathbf{y}_\ell$  соответственно) должны совпадать всякий раз, когда пользователь не в состоянии различить семейства распределений  $\mathcal{Q}_j$  и  $\mathcal{Q}_\ell$ .

В частности, для любых фиксированных  $j, \ell \in \{1, \dots, 2^{|\mathcal{L}|}\}$ ,  $j \neq \ell$ , мы обозначаем через  $N_{j,\ell} \subseteq N$  множество вершин, в которых пользователь может узнать фактическое семейство распределений, либо  $\mathcal{Q}_j$ , либо  $\mathcal{Q}_\ell$ , которое загадано злоумышленником. Кроме того, для графов общего вида нам приходится вводить дополнительные переменные  $\mathbf{t}_j \in \mathbb{R}^{|N|}$ , связанные с последовательностью, в которой вершины посещаются пользователем по сценарию  $\mathbf{y}_j$ . В следующих результатах мы формулируем упреждающие ограничения для ациклических графов и графов общего вида соответственно.

**Утверждение 2** *Предположим, что  $j, \ell \in \{1, \dots, 2^{|\mathcal{L}|}\}$ ,  $j \neq \ell$ , и пусть  $G$  - ориентированный ациклический граф. Тогда для каждой вершины  $i \in N \setminus N_{j,\ell}$  следующие ограничения обеспечивают упреждение:*

$$y_{j,a} = y_{\ell,a} \quad \forall a \in FS_i, \text{ если все вершины в } N_{j,\ell} \text{ достижимы из } i \quad (15a)$$

$$\left. \begin{aligned} |y_{j,a} - y_{\ell,a}| &\leq \sum_{n \in \tilde{N}_{j,\ell}} \sum_{a' \in FS_n} y_{j,a'} \quad \forall a \in FS_i, \\ &\text{если подмножество вершин } \tilde{N}_{j,\ell} \subseteq N_{j,\ell} \text{ недостижимо из } i \end{aligned} \right\} \quad (15b)$$

**Утверждение 3** *Предположим, что  $j, \ell \in \{1, \dots, 2^{|\mathcal{L}|}\}$ ,  $j \neq \ell$  и пусть  $G$  - граф общего вида. Тогда для каждой вершины  $i \in N \setminus N_{j,\ell}$  следующие ограничения обеспечивают упреждение:*

$$t_{j,s} = 0 \quad (16a)$$

$$0 \leq t_{j,i} \leq |N| - 1 \quad \forall i \in N \quad (16b)$$

$$t_{j,a_1} - t_{j,a_2} \leq -1 + |N|(1 - y_{j,a}) \quad \forall a \in A \quad (16c)$$

$$\left. \begin{aligned} |y_{j,a} - y_{\ell,a}| &\leq \sum_{n \in N_{j,\ell}} \min \left\{ \max\{t_{j,i} - t_{j,n}; 0\} + 2 - \right. \\ &\left. \sum_{a' \in FS_n} y_{j,a'} - \sum_{a' \in FS_i} y_{j,a'}; \sum_{a' \in FS_n} y_{j,a'} \right\} \end{aligned} \right\} \quad \forall a \in FS_i \quad (16d)$$

Стоит отметить, что изложенные ограничения упреждения для ациклических и общих графов, (15) и (16), могут быть выражены как линейные ограничения с использованием стандартных методов лианеризации.

Ключевое наблюдение, которое мы используем далее, заключается в том,



что каждое семейство распределений  $\mathcal{Q}_j$ ,  $j \in \{1, \dots, 2^{|\mathcal{L}|}\}$ , в многостадийной формулировке ( $\mathbf{F}_{ms}$ ) содержит те же типы вероятностных ограничений, что и исходное семейство  $\mathcal{Q}$ ; напомним предположение **A4**. Следовательно, с учетом теоремы 2, каждое подсемейство распределений  $\mathcal{Q}_j$ ,  $j \in \{1, \dots, 2^{|\mathcal{L}|}\}$ , можно рассматривать как некоторое полиэдральное множество неопределенности

$$\mathcal{S}_j := \left\{ \bar{\mathbf{c}} \in \mathbb{R}^{|\mathcal{A}|} : \mathbf{B}_j \bar{\mathbf{c}} \leq \mathbf{b}_j \right\} \subseteq \mathcal{S}_0 \quad (17)$$

с точки зрения ожидаемых стоимостей. Далее мы приводим линейную смешанно-целочисленную формулировку многостадийной задачи ( $\mathbf{F}_{ms}$ ).

**Теорема 3** Пусть  $G$  ациклический или общий граф и каждое семейство распределений  $\mathcal{Q}_j$ ,  $j \in \{1, \dots, 2^{|\mathcal{L}|}\}$ , описывается полиэдральным множеством неопределенности  $\mathcal{S}_j$ , определенным в (17). Тогда многостадийная РСЗПК ( $\mathbf{F}_{ms}$ ) может быть переформулирована как ЗСЦП вида:

$$z_{dynamic}^* = \min_{\mathbf{y}, \mathbf{t}, \mathbf{v}, \mathbf{w}, z} z \quad (18a)$$

$$\text{s.t. ограничения упреждения (15) или (16),} \quad (18b)$$

$$\left. \begin{array}{l} z \geq \mathbf{b}_j^\top \boldsymbol{\lambda}_j \\ -\mathbf{y}_j + \mathbf{B}_j^\top \boldsymbol{\lambda}_j = 0 \\ \boldsymbol{\lambda}_j \geq 0 \\ \mathbf{y}_j \in Y \end{array} \right\} \quad \forall j \in \{1, \dots, 2^{|\mathcal{L}|}\} \quad (18c)$$

Доказательство теоремы 3 основано на теореме 2 и стандартной теории двойственности для задач линейного программирования. Фактически, многостадийная РСЗПК может быть решена с помощью готовых программных пакетов в том случае, если ограничения упреждения (15) или (16) линеаризованы; вспомните исследовательский вопрос **Q3**.

## 3 Модель I: краткое изложение результатов вычислений

### 3.1 Численный анализ одностадийной задачи

В этом разделе мы анализируем одностадийную РСЗПК ( $\mathbf{F}_{os}$ ) на классе синтетических случайно сгенерированных тестовых примеров. В частности, используя стандартные неравенства концентрации меры, мы строим исходное семейство распределений (4) на основе заданного набора обучающих данных. Важно отметить, что вместо полного набора данных пользователь может использовать линейные комбинации стоимостей для некоторых подмножеств ребер или интервальные наблюдения для конкретных ребер; см. подробности в разделе 1.2 полной версии тезиса. Далее мы анализируем качество робастно-стохастических решений, а также вычислительную сложность линейной ЗСЦП (12). Предлагаемый подход сравнивается с несколькими другими робастными и робастно-стохастическими методами оптимизации с точки зрения ошибки на тестовой выборке.

**Тестовые примеры и эталонные подходы.** Мы рассматриваем класс послойных ациклических графов, которые, как предполагается, содержат  $h \in \mathbb{Z}_+$  промежуточных слоев и  $r \in \mathbb{Z}_+$  вершин в каждом слое. Первый и последний слои состоят из единственных вершин, которые являются стартовой и финишной вершинами, соответственно. Например, сеть с  $h = 3$  и  $r = 3$  изображена на рисунке 2.

Что касается номинальных маргинальных распределений  $\mathbb{Q}_a^*$ ,  $a \in A$ , мы предполагаем, что стоимость ребра  $c_a$  генерируется из обобщенного бета-распределения на интервале  $[l_a, u_a]$ . Номинальное распределение  $\mathbb{Q}^*$  задается произведением маргинальных распределений  $\mathbb{Q}_a^*$ ,  $a \in A$ . Мы вводим следующие параметры исходного семейства распределений (4):

- $\hat{n} \in \mathbb{Z}_+$  - размер выборки для каждого  $a \in A$ ;
- $n_1 \in \mathbb{Z}_+$  - количество подинтервалов для каждого  $a \in A$  в (1);

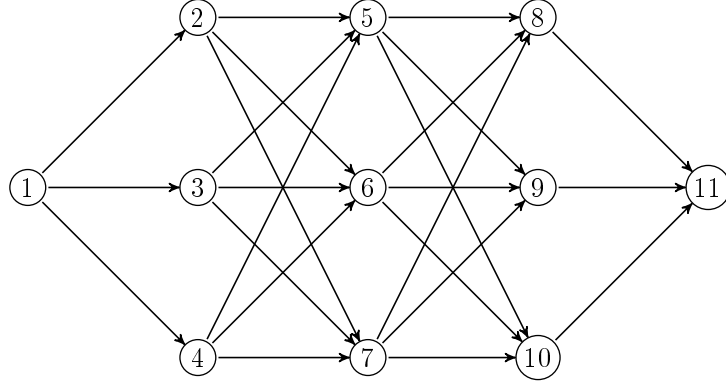


Рис. 2: Послойный ациклический граф с  $h = 3$  промежуточными слоями и  $r = 3$  вершинами на каждом слое. Стартовая и финишная вершины заданы как  $s = 1$  и  $f = 11$  соответственно.

- $\kappa \in (0, 1)$  - относительная ширина подинтервалов для каждого  $a \in A$ ;
- $\eta \in (0, 1)$  и  $\eta_0 \in (0, 1)$  - вероятность нарушения для каждого отдельного ограничения и для семейства распределений, соответственно.

Как вероятностные, так и линейные ограничения на математическое ожидание, (2) и (3), построены с использованием неравенства Хоффдинга [39] с учетом вероятности нарушения  $\eta$  для каждого ограничения. Кроме того, ограничения типа (3) связаны с некоторым заданным набором путей от  $s$  до  $f$  в  $G$ .

В вычислительном исследовании для одностадийной модели мы сравниваем предложенную формулировку ( $\mathbf{F}_{os}$ ) с несколькими другими эталонными подходами. В частности, мы рассматриваем подход робастной оптимизации Берцимаса и Сима [40] с бюджетным параметром  $\Gamma \in \{0, 1, \dots, |A|\}$  и специализированную модель робастно-стохастической оптимизации с покомпонентными ограничениями на моменты [41].

**Показатели эффективности.** Для любого пути  $\tilde{P} \in \mathcal{P}_{sf}(G)$ , соответствующего вектора инцидентности пути  $\tilde{\mathbf{y}} \in Y$  и номинального распределения  $\mathbb{Q}^*$  мы оцениваем качество  $\tilde{P}$  за счет использования *номинальных относительных потерь*

$$\rho_0(\tilde{\mathbf{y}}, \mathbb{Q}^*) := \frac{\mathbb{E}_{\mathbb{Q}^*}\{\mathbf{c}^\top \tilde{\mathbf{y}}\}}{\min_{\mathbf{y} \in Y} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}^*}\{\mathbf{c}^\top \mathbf{y}\}} \quad (19)$$

Подход к решению	Номинальные относительные потери
РСЗПК ( $\mathbf{F}'_{os}$ )	1.27 (0.11)
РСЗПК ( $\mathbf{F}_{os}$ )	1.19 (0.08)
РСЗПК из [41]	1.55 (0.13)
РЗПК из [40] с $\Gamma = 0$	2.14 (0.27)
РЗПК из [40] с $\Gamma = 7$	1.85 (0.19)
РЗПК из [40] с $\Gamma = 14$	1.85 (0.21)
РЗПК из [40] с $\Gamma = 21$	2.13 (0.20)

Таблица 1: Пусть  $\kappa = 0.6$  и  $n_1 = 4$ . Мы указываем средние относительные потери (19) и стандартные отклонения (в скобках) по 100 случайным примерам.

В частности, (19) отражает отношение номинальных ожидаемых потерь, понесенных пользователем, к оптимальным ожидаемым потерям при наличии полной информации о распределении, т.е. когда ожидаемые затраты  $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}_a^*}\{c_a\}$ ,  $a \in A$ , известны априори.

**Примеры численных результатов.** В оставшейся части этого раздела мы устанавливаем  $h = 20$ ,  $r = 10$ ,  $\hat{n} = 100$  и  $\eta_0 = 0.05$ , если другое не указано. Для каждого  $a \in A$  мы строим множество значений, выбирая  $l_a$  равномерно распределенным на  $[0, 100]$  и  $u_a := l_a + \Delta_a$ , где  $\Delta_a$  равномерно распределено на  $[0, 100]$ .

В качестве примера мы анализируем номинальные относительные потери (19) для рассмотренных робастных и робастно-стохастических формулировок РСЗПК. В таблице 1 мы приводим средние относительные потери (19) и стандартные отклонения (в скобках), понесенные пользователем в 100 случайных тестовых примерах для  $\kappa = 0.6$  и  $n_1 = 4$ .

Мы делаем следующие замечания:

- Естественным образом, с увеличением  $n_1$  номинальные относительные потери (19) уменьшаются, поскольку доступно больше информации о распределении.
- Робастная формулировка Берцимаса и Сима [40] не использует никакой информации о распределении и, таким образом, предоставляет чрезмерно консервативные решения.

- Мы удостоверяемся, что наша формулировка РСЗПК ( $\mathbf{F}'_{os}$ ) превосходит формулировку, основанную на моментах, с точки зрения номинальных относительных потерь.
- Ошибка на тестовой выборке для ( $\mathbf{F}_{os}$ ) уменьшается, когда в модель включаются линейные ограничения на математическое ожидание.

В полной версии этого тезиса мы также анализируем номинальные относительные потери (19) как функцию относительной ширины базовых подинтервалов,  $\kappa$ , и количества подинтервалов,  $n_1$ . Наконец, мы показываем, что время решения для ЗСЦП (12) достаточно мало и хорошо масштабируется по количеству слоев,  $h$ .

## 3.2 Численный анализ многостадийной задачи

В этом разделе мы исследуем, выгодно ли пользователю использовать динамические решения. Другими словами, роль вспомогательных вероятностных ограничений (13) анализируется в отношении качества динамических решений и сложности смешанно-целочисленной формулировки (18).

**Тестовые примеры.** Мы рассматриваем два класса послойных полносвязных графов, которые либо являются ациклическими, либо содержат направленные циклы. Послойные ациклические графы совпадают с графами, рассмотренными для одностадийной задачи. Графы общего вида, в свою очередь, получаются из ациклических графов при условии, что ребра, не замыкающие к  $s$  и  $f$ , могут быть пройдены в обоих направлениях.

Аналогично тестовым примерам для одностадийной задачи, мы предполагаем, что стоимости ребер  $c_a$  генерируются из бета-распределения, но с множеством значений  $[0, 1]$  для каждого  $a \in A$ . Предполагается, что номинальные маргинальные распределения  $\mathbb{Q}^*_{(i,j)}$  и  $\mathbb{Q}^*_{(j,i)}$  являются *одинаковыми* для любого  $(i, j) \in A$ . Номинальное распределение  $\mathbb{Q}^*$  определяется как произведение маргинальных распределений  $\mathbb{Q}^*_a$ ,  $a \in A$ .

Предполагается, что исходное семейство распределений содержит только ограничения на математическое ожидание относительно суммы стоимостей

ребер  $c_a$ ,  $a \in FS_i \cup RS_i$ , для каждого  $i \in N$ . Верхнюю границу вышеупомянутой суммы можно рассматривать как бюджет злоумышленника, выделенный в вершине  $i$ . Кроме того, эта граница может быть определена из набора обучающих данных с использованием неравенства Хеффдинга. Мы не рассматриваем некоторые более сложные семейства распределений, поскольку наше внимание сосредоточено на роли вспомогательных вероятностных ограничений (13).

Для простоты мы предполагаем, что вспомогательные ограничения также имеют вид ограничений на математическое ожидание (13b), которые построены с использованием информации от датчиков (случай вероятностных ограничений рассмотрен в полной версии тезиса). Другими словами, предполагается, что каждая вершина оснащена датчиком с некоторой фиксированной вероятностью; см., например, рисунок 3. Мы предлагаем три типа вспомогательных ограничений:

- *индивидуальные ограничения*, соответствующие соседним датчикам, например, ограничения для ожидаемой стоимости (1, 2), (2, 4) и (2, 5) на рисунке 3.
- *ограничения на разность*, например, ограничения в отношении разности ожидаемых стоимостей (3, 4) и (3, 5) на рисунке 3.
- *ограничения на сумму*, например, ограничения относительно суммы ожидаемых стоимостей (3, 4) и (3, 5) на рисунке 3 (мы используем эти ограничения, если хотя бы одно из ребер может быть пройдено в обоих направлениях).

Мы собираем необходимое количество ограничений, выбирая случайную вершину и случайное ограничение, связанное с этой вершиной.

Кроме того, мы проводим различие между набором данных, используемым для построения исходного семейства распределений, и вспомогательным набором данных, используемым для проверки вспомогательных ограничений. В частности, вспомогательные ограничения могут быть проверены на некото-

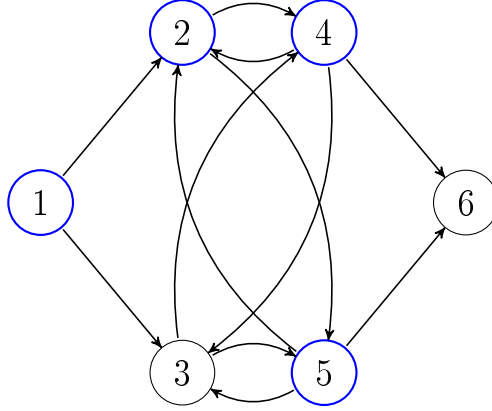


Рис. 3: Пример случайного распределения датчиков для послойного графа с  $h = r = 2$ . Датчики выделены синим цветом.

ром заданном уровне значимости с использованием неравенства Хеффдинга; дополнительные подробности см. в разделе 2.2.2 в полной версии.

**Показатели эффективности.** Мы предлагаем следующую двухэтапную процедуру для проверки нашего подхода. На первом этапе мы строим исходное семейство распределений  $\mathcal{Q}$  и решаем ЗСЦП (18), чтобы получить оценку оптимального решения пользователя для каждого возможного вектора ответов злоумышленника. На втором шаге или *процедуре проверки ограничений* мы пытаемся идентифицировать фактическую последовательность ответов злоумышленника путем динамической проверки вспомогательных ограничений (13) в соответствующих вершинах пути пользователя.

Качество динамических решений на первом этапе оценивается с использованием относительной разности вида:

$$\rho_1 := 100 \times \frac{z_{static}^* - z_{dynamic}^*}{z_{static}^* - z_{lower}}, \quad (\mathbf{G}_1)$$

где  $z_{lower}$  обеспечивает некоторую нижнюю границу значения целевой функции многостадийной задачи ( $\mathbf{F}_{ms}$ ). В частности, мы выбираем в качестве  $z_{lower}$  оптимальное значение целевой функции связанной макс-мин задачи, т.е. одностадийной задачи ( $\mathbf{F}_{os}$ ), где порядок операторов “max” и “min” обращен. Относительная разность  $\rho_1 \in [0, 100]$  количественно определяет прибыль пользователя (в процентах), полученную от использования динамических решений

Число ограничений	Ациклические графы		
	$\rho_1$ (CAO) в %	$\rho_2$ (CAO) в %	среднее время (CAO) в сек.
$ \mathcal{L}  = 1$	2.0 (3.5)	1.5 (2.8)	0.04 (0.02)
$ \mathcal{L}  = 2$	4.8 (7.2)	5.8 (9.1)	0.07 (0.02)
$ \mathcal{L}  = 3$	6.3 (8.9)	8.3 (11.7)	0.17 (0.07)
$ \mathcal{L}  = 4$	8.3 (10.0)	11.3 (14.1)	0.67 (0.33)
$ \mathcal{L}  = 5$	10.2 (11.6)	12.2 (15.2)	3.8 (2.85)

Таблица 2: Пусть  $h = r = 3$ ,  $\hat{n} = \tilde{n} = 60$  и предположим, что граф ациклический. Мы приводим средние относительные разности ( $\mathbf{G}_1$ ) и ( $\mathbf{G}_2$ ) и среднее время выполнения в секундах со средними абсолютными отклонениями (CAO) по 50 случайным тестовым примерам.

(по отношению к статической постановке задачи).

С другой стороны, качество процедуры проверки ограничений определяется как:

$$\rho_2 := 100 \times \frac{z_{dynamic}^* - \tilde{z}_{dynamic}}{z_{static}^* - z_{lower}}, \quad (\mathbf{G}_2)$$

где  $\tilde{z}_{dynamic}$  - это наша оценка ожидаемых потерь в наихудшем случае *после* процедуры проверки ограничений. Можно также утверждать, что сумма  $\rho_1 + \rho_2$  характеризует общее значение (в процентах), на которое может быть уменьшена разность  $z_{static}^* - z_{lower}$ . При этом значение  $\rho_2$  неотрицательно, но фактическая верхняя граница четко не определена.

**Примеры численных результатов.** Одним из наиболее важных вопросов является изучение того, как качество адаптивных решений масштабируется в зависимости от количества вспомогательных ограничений. В частности, для различных значений параметров мы вычисляем средние относительные разности ( $\mathbf{G}_1$ ) и ( $\mathbf{G}_2$ ) и среднее время выполнения (со средними абсолютными отклонениями) для 50 тестовых экземпляров.

Мы вводим следующие параметры:

- $\zeta \in (0, 1)$  - вероятность того, что датчик размещен в каждой вершине;
- $\hat{n} \in \mathbb{Z}_{>0}$  - число наблюдений в исходном наборе данных;
- $\tilde{n} \in \mathbb{Z}_{>0}$  - число наблюдений во вспомогательном наборе;



Число ограничений	Общие графы		
	$\rho_1$ (CAO) в %	$\rho_2$ (CAO) в %	среднее время (CAO) в сек.
$ \mathcal{L}  = 1$	1.8 (3.2)	3.3 (5.9)	0.08 (0.05)
$ \mathcal{L}  = 2$	3.6 (6.0)	4.4 (7.3)	0.28 (0.10)
$ \mathcal{L}  = 3$	4.9 (7.1)	9.1 (13.1)	10.1 (6.71)
$ \mathcal{L}  = 4$	-	-	> 600
$ \mathcal{L}  = 5$	-	-	> 600

Таблица 3: Пусть  $h = r = 3$ ,  $\hat{n} = \tilde{n} = 60$  и предположим, что граф общего вида. Мы приводим средние относительные разности ( $\mathbf{G}_1$ ) и ( $\mathbf{G}_2$ ) и среднее время выполнения в секундах со средними абсолютными отклонениями (CAO) по 50 случайным тестовым примерам.

- $\eta_0 \in (0, 1)$  - вероятность нарушения для начального семейства распределений;
- $\gamma \in (0, 1)$  - уровень значимости для каждого вспомогательного ограничения.

Пусть  $\eta_0 = 0.05$ ,  $\gamma = 0.95$  и  $\zeta = 0.5$ ,  $h = r = 3$  и  $\hat{n} = \tilde{n} = 60$ . Для каждого тестового примера мы увеличиваем количество вспомогательных ограничений,  $|\mathcal{L}|$ , с 1 до 5. Результаты для ациклических и общих графов представлены, соответственно, в таблицах 2 и 3.

Наблюдения, полученные в результате наших вычислений, можно резюмировать следующим образом:

- Увеличение числа вспомогательных ограничений предоставляет пользователю больше информации и, таким образом, повышает качество как адаптивных решений, так и процедуры проверки ограничений.
- Многостадийная задача ( $\mathbf{F}_{ms}$ ) становится более сложной в вычислительном отношении для графов общего вида и с увеличением  $|\mathcal{L}|$ . Этот факт интуитивно понятен, поскольку количество переменных и ограничений в ( $\mathbf{F}_{ms}$ ) экспоненциально в зависимости от  $|\mathcal{L}|$  и увеличивается для графов общего вида.

Стоит признать, что в первую очередь наш подход имеет смысл применять к сетям относительно небольшого размера, в которых решения с до-

статочно высоким качеством могут быть получены за разумное время. Можно также утверждать, что большинство существующих подходов к решению многостадийных задач с бинарными переменными решения могут быть применены только к задачам умеренного размера; см., например, исследования в [27, 42, 43] и ссылки в них.

## 4 Модель II: формулировка проблемы и подход к ее решению

**Обозначения.** В формулировке Модели II мы используем следующие обозначения. Как и для Модели I, мы рассматриваем связанный взвешенный ориентированный граф  $G = (N, A, \mathbf{c})$ . Для подмножества ребер  $A' \subseteq A$  мы определяем подграф  $G$ , индуцированный этим подмножеством, как  $G[A'] = (N, A', \mathbf{c}')$ , т.е. множество ребер сводится к  $A'$  и  $\mathbf{c}' := \{c_a, a \in A'\}$ . Количество стадий принятия решений и бюджет злоумышленника обозначаются как  $T \in \mathbb{Z}_{>0}$  и  $k \in \mathbb{Z}_{>0}$  соответственно. Кроме того, пусть  $\ell(P)$  - стоимость пути  $P \in \mathcal{P}_{sf}(G)$ , то есть  $\ell(P) = \sum_{a \in P} c_a$ . Наконец, мы определяем

$$z^*(G) = \min_{P \in \mathcal{P}_{sf}(G)} \ell(P),$$

т.е.  $z^*(G)$  - это стоимость кратчайшего пути от  $s$  до  $f$  в  $G$ .

### 4.1 Формулировка задачи

Как описано в разделе 1.3, мы предполагаем, что пользователь обладает полной информацией о графе, в то время как злоумышленник изначально наблюдает подсеть  $G[A_0]$  данной сети  $G$ , т.е. он информирован только о существовании ребер в  $A_0$  и их стоимостях. В каждой стадии принятия решений  $t \in \{1, 2, \dots, T\}$  происходит следующая последовательность событий:

1. Злоумышленник выбирает набор  $I_t \subseteq A_{t-1}$  не более чем из  $k$  ребер, которые будут заблокированы ровно на одну стадию принятия решений.

2. Пользователь проходит по пути  $P_t \in \mathcal{P}_{sf}(G[A \setminus I_t])$ . Мы называем  $\ell(P_t)$  текущими потерями пользователя. Пользователь также раскрывает злоумышленнику ребра в  $P_t$  и их стоимость.
3. Злоумышленник обновляет доступную ему информацию, т.е.  $A_t = A_{t-1} \cup P_t$ .

Мы предполагаем, что пользователь пытается минимизировать свои совокупные потери в течение  $T$  периодов, в то время как злоумышленник ограничен тем, чтобы действовать жадно в каждой стадии принятия решений. Более того, мы делаем следующие предположения:

**A1'**. В каждом периоде злоумышленник действует первым. Кроме того, злоумышленник является *жадным* в том смысле, что он всегда перекрывает набор  $k$  наиболее значимых ребер в наблюдаемой сети, т.е.

$$I_t \in \arg \max \{z^*(G[A_{t-1} \setminus I]) : I \subseteq A_{t-1}, |I| \leq k\}. \quad (20)$$

**A2'**. Граф  $G$  не является тривиально  $k$ -разделимым, то есть любое подмножество из  $k$  ребер в  $G$  не является  $s - f$  разрезом.

**A3'**. Если существует более одного возможного выбора для  $I_t$ , то злоумышленник перекрывает ребра, следуя четко определенному детерминированному правилу, которое является *согласованным* в том смысле, что если  $I_t$  выбрано из набора решений  $\mathcal{I}$ , то оно также выбирается из любого набора решений  $\tilde{\mathcal{I}} \subseteq \mathcal{I}$ , содержащих  $I_t$ .

**A4'**. Пользователь имеет полную информацию о структуре графа, стоимостях ребер и бюджете злоумышленника,  $k$ . Пользователь наблюдает за действиями злоумышленника, прежде чем выбрать путь, и не может использовать перекрытые ребра.

**A5'**. Злоумышленнику изначально предоставляется информация только о подсети  $G[A_0]$ . В каждой стадии он наблюдает путь  $P_t$ , выбранный пользователем, и затраты  $c_a$  каждой дуги  $a \in P_t$ .

Допущения **A1'**-**A5'** в основном технические и формируют некоторые основные свойства нашей постановки задачи для Модели II. В частности, предположение **A3'** подразумевает, что стратегии злоумышленника являются детерминированными. Предположение *согласованности* схоже с аналогичным предположением в [12] для стратегий пользователя. Так, можно считать, что в каждой стадии принятия решений злоумышленник ранжирует все возможные решения в известной ему сети на основе некоторых критериев, например, их стоимости для пользователя. Затем злоумышленник выбирает решение для перекрытия с самым высоким рейтингом из такого списка.

Вторая часть предположения **A5'** представляет случай идеальной обратной связи от пользователя к злоумышленнику, аналогичной исследованиям в [12, 13]. Мы используем вторую часть предположения **A5'** при выводе наших теоретических результатов, в то время как мы ослабляем это предположение в нашем вычислительном исследовании.

С учетом приведенного выше обсуждения проблема пользователя может быть сформулирована как следующая повторяющаяся задача иерархической комбинаторной оптимизации:

$$\min_{P_t} \sum_{t=1}^T \ell(P_t) := \sum_{t=1}^T \sum_{a \in P_t} c_a \quad (21a)$$

$$\text{s.t. } P_t \in \mathcal{P}_{sf}(G[A \setminus I_t]) \quad \forall t \in \{1, \dots, T\}, \quad (21b)$$

$$I_t \in \operatorname{argmax}\{z^*(G[A_{t-1} \setminus I]) : I \subseteq A_{t-1}, |I| \leq k\} \quad \forall t \in \{1, \dots, T\}, \quad (21c)$$

$$A_t = A_{t-1} \cup P_t \quad \forall t \in \{1, \dots, T\}, \quad (21d)$$

где целевая функция пользователя в (21a) представляет собой сумму текущих потерь пользователя за  $T$  периодов. Ограничения (21b) гарантируют, что  $P_t$  не включает в себя ребра, которые блокируются злоумышленником в стадии  $t$ . Ограничения (21c) требуют, чтобы множество  $I_t$  было набором из  $k$  наиболее значимых ребер в  $G[A_{t-1}]$  (напомним предположение **A1'**), т.е. (21c) подразумевает иерархическую структуру принятия решений. Наконец,

(21d) указывает, что набор ребер, известных злоумышленнику в стадии  $t$ , обновляется в соответствии с предположением **A5'**.

В дальнейшем мы предполагаем, что жадный злоумышленник наделен *частичным оракулом*. Другими словами, такой злоумышленник выбирает набор из  $k$  наиболее значимых ребер  $I_t \subseteq A_{t-1}$  в  $G[A_{t-1}]$  так, чтобы максимизировать текущие потери пользователя  $\ell(P_t^\pi)$  в соответствии с некоторой стратегией пользователя  $\pi$  в стадии  $t$ . Мы также вводим техническое требование, чтобы жадный злоумышленник с частичным оракулом максимизировал  $|I_t|$  в качестве своей вспомогательной цели.

Далее мы приводим наглядный пример, сравнивающий жадного пользователя с “тактическим”, т.е. следующим более сложной стратегии, чем жадная. Мы обозначаем через  $P_t^{SP}$  и  $P_t^{SE}$ ,  $t \geq 1$ , решения пользователя в рамках жадной и тактической стратегии соответственно. Кроме того, *совокупные потери* пользователя в соответствии с некоторой стратегией  $\pi$  за  $T$  стадий определяются следующим образом:

$$L_T^\pi := \sum_{t=1}^T \ell(P_t^\pi)$$

**Пример 2** Граф  $G$ , используемый в этом примере, приведен на рисунке 4. Пусть  $s = 1$  и  $f = 4$  - стартовая и финишная вершины соответственно, а  $M$  - вещественное число, такое, что  $M > 5$ . Мы также устанавливаем  $T = 2$ ,  $k = 2$  и  $A_0 = \emptyset$ .

Во-первых, мы рассматриваем случай жадного пользователя. Поскольку  $A_0 = \emptyset$  мы имеем  $I_1 = \emptyset$ , а в первой стадии жадный пользователь следует по кратчайшему пути  $P_1^{SP} = \{1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4\}$ . Затем мы получим, что  $A_1 = P_1^{SP}$  и, таким образом, любое подмножество из 2 ребер в  $P_1^{SP}$  также является  $k$  наиболее значимыми ребрами в  $G[A_1]$ .

Далее, поскольку злоумышленник наделен частичным оракулом, он знает, что стратегия пользователя  $\pi$  является жадной, и пытается максимизировать текущие потери пользователя  $\ell(P_2^\pi) = z^*(G[A \setminus I_2^\pi])$  во второй стадии принятия решений. Мы приходим к выводу, что злоумышленник пере-

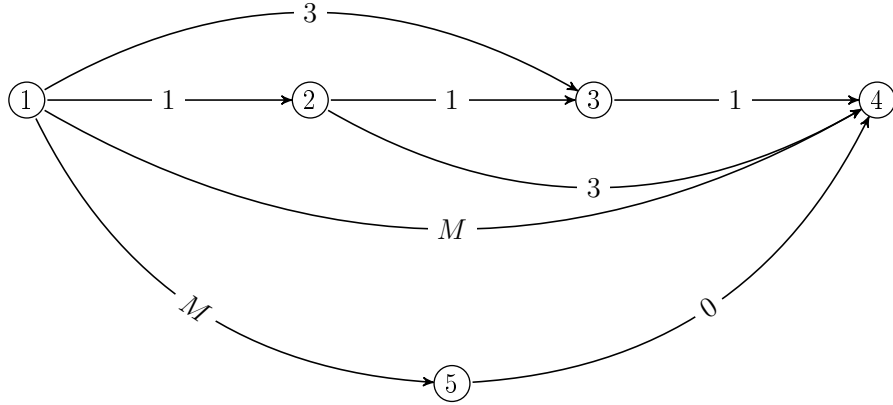


Рис. 4: Граф, используемый в примере 2. Для стоимостей ребер  $(1, 4)$  и  $(1, 5)$  мы предполагаем, что  $M > 5$ .

крывает ребра  $(1, 2)$  и  $(3, 4)$ , что подразумевает, что  $I_2^{SP} = \{(1, 2), (3, 4)\}$  и  $P_2^{SP} = \{1 \rightarrow 5 \rightarrow 4\}$ . В частности,  $|I_2| = 2 = k$  и выбирается решение с максимально возможной мощностью. В результате совокупные потери жадного пользователя равны  $L_2^{SP} = 3 + M$ .

Затем мы рассмотрим тактического пользователя, который последовательно проходит по непересекающимся путям  $P_1^{SE} = \{1 \rightarrow 2 \rightarrow 4\}$  и  $P_2^{SE} = \{1 \rightarrow 3 \rightarrow 4\}$ . В этом случае  $I_2^{SE} = \{(1, 2), (2, 4)\}$  и совокупные потери тактического пользователя определяются как  $L_2^{SE} = 4 + 4 = 8 < L_2^{SP}$ .  $\square$

Пример 2 иллюстрирует, что если пользователь знает, что злоумышленник следует жадной стратегии, то он может использовать этот факт, чтобы уменьшить свои собственные совокупные потери. Кроме того, мы наблюдаем, что пути, используемые тактическим пользователем, имеют некоторые общие ребра с кратчайшим путем; некоторое теоретическое обоснование этих наблюдений приведено в разделе 4.3. Наконец, довольно просто проверить, что тактическая стратегия пользователя может доминировать над жадной для произвольно больших  $T \geq 2$  и непустого  $A_0$ .

## 4.2 Вычислительная сложность

Далее мы покажем, что задача пользователя является  $NP$ -трудной даже в случае  $T = 2$  и для сетей, в которых проблема перекрытия  $k$  наиболее зна-

чимых ребер в  $G[A_0]$  и  $G[A_1]$  полиномиально разрешима. В связи с этим мы определяем бинарную версию проблемы пользователя (**UP**) для  $T = 2$ :

### Задача 2-UP.

*Дано:* граф  $G$  вместе со стартовой и финишной вершиной,  $s$  и  $f$ , подмножество ребер  $A_0$ , известных злоумышленнику, бюджет злоумышленника  $k \in \mathbb{Z}_{>0}$  и пороговое значение  $l \in \mathbb{R}_{>0}$ .

*Вопрос:* существуют ли два пути  $P_1, P_2 \in \mathcal{P}_{sf}(G)$  общей стоимостью не более  $l$ , которые могут быть последовательно пройдены пользователем, учитывая, что злоумышленник жадный и наделен частичным оракулом?  $\square$

**Теорема 4** *Задача 2-UP является NP-полной в сильном смысле для класса графов, где проблема перекрытия (в  $G[A_0]$  и  $G[A_1]$ ) полиномиально разрешима.*

Доказательство теоремы 4 основано на приведении, исходя из задачи булевой выполнимости (**3-SAT**), где для любого примера **3-SAT** мы строим конкретный пример **2-UP** задачи. Следуя приведенному выше обсуждению, мы строим пример **2-UP** таким образом, что допустимость любого решения пользователя может быть проверена за полиномиальное время в зависимости от числа ребер, т.е. проблема  $k$  наиболее значимых ребер как в  $G[A_0]$ , так и в  $G[A_1]$  является полиномиально разрешимой. Наша конструкция доказательства похожа на ту, которая использовалась в [44] и где показано, что задача нахождения двух непересекающихся путей с минимальной суммарной стоимостью (и с меняющимися во времени стоимостями) является сильно NP-полной. Однако наша постановка задачи требует несколько иной структуры вектора стоимостей и использования “неустрашимых” ребер; см. раздел 3.2 в полной версии.

## 4.3 Базовый анализ стратегий пользователя

Ввиду теоремы 4, естественно исследовать некоторые аналитические свойства оптимальных стратегий пользователя в простом случае, т.е. когда  $T = 2$

и  $A_0 = \emptyset$ , а затем использовать эти свойства, чтобы предложить эвристический алгоритм для произвольного набора исходной информации и любого временного горизонта.

Во-первых, при некотором довольно мягком допущении мы показываем, что оптимальное решение проблемы пользователя (21) при  $T = 2$  и  $A_0 = \emptyset$  является жадным, либо состоит из двух различных путей, которые пересекаются с кратчайшим путем в исходной сети. Так, чтобы упростить наши выводы, мы предполагаем, что затраты на все возможные пути от  $s$  до  $f$  различны. Другими словами, мы можем перечислить пути в строго возрастающем порядке, согласно их стоимости:

$$\ell(P^{(1)}) < \ell(P^{(2)}) < \dots < \ell(P^{(\mu)}), \quad (22)$$

где  $|\mathcal{P}_{sf}(G)| = \mu$ . Мы также обозначаем через  $\nu(P)$  индекс пути  $P \in \mathcal{P}_{sf}(G)$  в приведенном выше списке. Имеют место следующие результаты.

**Лемма 1** Пусть  $A_0 = \emptyset$ ,  $k \geq 1$  и предположим, что пользователь жадный. Если мы обозначим через  $r$  индекс пути, пройденного пользователем при  $t = 2$ , т.е.  $r = \nu(P_2^{SP})$ , то для любого  $z \in \{1, 2, \dots, r-1\}$  путь  $P^{(z)}$  заблокирован злоумышленником при  $t = 2$ .

**Теорема 5** Предположим, что злоумышленник является жадным и наделен частичным оракулом с  $A_0 = \emptyset$  и  $k \geq 1$ . Пусть  $T = 2$  и  $r = \nu(P_2^{SP})$ , где  $r \geq 2$ . Если  $P_1^{OPT} = P^{(i)}$  и  $P_2^{OPT} = P^{(j)}$  являются оптимальным решением проблемы пользователя для  $T = 2$ , то либо  $i = 1$ , либо  $j = r$ , или  $P^{(i)}$  и  $P^{(j)}$  удовлетворяют следующим условиям:

$$P^{(i)} \cap P^{(1)} \neq \emptyset \quad \text{and} \quad P^{(j)} \cap P^{(1)} \neq \emptyset, \quad (23)$$

$$\ell(P^{(1)}) + \ell(P^{(r)}) > \ell(P^{(i)}) + \ell(P^{(j)}), \quad (24)$$

$$1 < i < r, \quad 1 < j < r \quad \text{and} \quad i \neq j. \quad (25)$$

Доказательство леммы 1 следует из определения жадной стратегии пользователя, в то время как доказательство теоремы 5 основано на лемме 1 и



том факте, что злоумышленник является жадным и наделен частичным оракулом. Теорема 5 подразумевает, что существуют две взаимоисключающие альтернативы: либо жадная стратегия оптимальна для  $T = 2$  и  $A_0 = \emptyset$ , либо существует более предпочтительное решение пользователя, которое состоит из двух различных путей,  $P^{(i)}$  и  $P^{(j)}$ , которые оба имеют некоторые общие ребра с кратчайшим путем от  $s$  до  $f$  в исходном графе; см. (23).

Один естественный вопрос, возникающий далее, заключается в том, являются ли эти два различных пути последней альтернативы непересекающимися, либо также пересекаются между собой. В полной версии тезиса мы демонстрируем, что для  $T = 2$  и  $A_0 = \emptyset$  оптимальное решение является жадным для  $k = 1$  и состоит из непересекающихся путей при достаточно больших значениях  $k$ . Однако оптимальное решение пользователя может быть достаточно нетривиальным при условии, что  $k$  превышает 2, но также не слишком велико.

Мы приходим к выводу, что в целом как жадные, так и непересекающиеся решения пользователя могут быть неоптимальными. В то же время необходимые условия, заданные теоремой 5, предоставляют некоторую интуицию, которую мы используем при разработке эвристического алгоритма для тактического пользователя.

Ключевая идея нашего алгоритма основана на двухэтапной концепции “заглядывания вперед”. В частности, в каждом периоде принятия решений у пользователя есть два варианта: либо он следует жадной стратегии, либо ищет два альтернативных пути, которые могут быть пройдены последовательно с совокупными затратами, которые не превышают потери, полученные при жадном подходе. Пара альтернативных путей генерируется эвристическим способом путем блокирования подмножества ребер некоторой определенной мощности кратчайшего пути, а затем проверки того, что условия (23)-(24) Теоремы 5 выполнены. Важно отметить, что благодаря своей двухэтапной идее прогнозирования наш алгоритм может быть применен итеративным образом для произвольного временного горизонта  $T$  и множества исходной информации  $A_0$ . Мы опускаем дальнейшие подробности об алго-

ритме для краткости и ссылаемся на раздел 3.4 в полной версии тезиса для псевдокода.

## 5 Модель II: краткое изложение результатов вычислений

В этом разделе мы сравниваем предложенный эвристический алгоритм для тактического пользователя с жадной стратегией. Мы показываем, что эвристический подход работает достаточно хорошо даже при довольно больших значениях  $T$  (напомним, что наш алгоритм генерирует решения не более чем для двух временных периодов) и превосходит жадную стратегию на нескольких классах синтетических тестовых примеров.

В дополнение к идеальному сценарию обратной связи (вспомним предположение **A5'**), мы также рассматриваем сценарий обратной связи с шумом, где для каждого ребра, изначально не известного злоумышленнику, но пройденного пользователем в периоде  $t$ , т.е.  $a \in P_t \setminus A_{t-1}$ , злоумышленник не получает точной информации о фактической стоимости этого ребра, но наблюдает зашумленную реализацию этой стоимости. Другими словами, мы ослабляем допущение **A5'**, чтобы отразить более реалистичные сценарии поведения злоумышленника.

**Тестовые примеры.** Тестовые примеры, используемые в наших экспериментах, представлены тремя классами случайных графов, т.е.,

- *Послойные графы.* Первый и последний слои состоят из стартовой и финишной вершин соответственно; ребра между слоями генерируются с некоторой заранее определенной вероятностью (вероятность тем меньше, чем больше “расстояние” между слоями).
- *Однородные графы* [45]. Направленное ребро между любой парой вершин существует с некоторой фиксированной вероятностью. Стартовая и финишная вершины выбираются таким образом, чтобы расстояние между ними составляло примерно половину диаметра.

- *ВА графы* [46]. Эти графы построены на основе механизма предпочтительного присоединения. Стартовая и финишная вершины выбираются как для однородных графов.

Набор ребер  $A_0$ , изначально доступных злоумышленнику, генерируется с использованием ряда случайно сгенерированных путей от  $s$  до  $f$  в  $G$ . Как описано выше, мы рассматриваем два типа информационной обратной связи от пользователя к злоумышленнику, а именно идеальную и зашумленную обратную связь. Идеальная обратная связь удовлетворяет предположению **A5'**. Обратная связь с зашумленной информацией генерируется из равномерного распределения на некотором интервале с центром в номинальном значении стоимости ребра. Наконец, мы используем подход к решению из [15] для решения задачи  $k$  наиболее значимых ребер, возникающей с точки зрения злоумышленника.

**Показатели эффективности.** В каждом *эксперименте* мы генерируем 100 тестовых примеров, т.е. случайных графов определенного типа, для некоторых фиксированных значений бюджета злоумышленника  $k$  и временного горизонта  $T$ . Затем мы обозначаем через  $\chi_=(T, k)$  процент тестовых примеров в конкретном эксперименте, в котором качество жадной стратегии и предлагаемого эвристического подхода совпадают, т.е. потери пользователя, полученные этими методами, одинаковы. Кроме того, пусть  $\chi_<(T, k)$  - процент тестовых примеров, в которых эвристика превосходит жадную стратегию. Затем процент тестовых примеров, в которых эвристический подход превосходит жадную стратегию, определяется как:

$$\chi_>(T, k) = 100 - \chi_<(T, k) - \chi_=(T, k).$$

Мы используем  $\chi_=$ ,  $\chi_<$  и  $\chi_>$  в качестве показателей эффективности предлагаемой эвристики.

**Примеры численных результатов.** Мы рассматриваем случайные послойные графы с  $h = 10$  промежуточными слоями. Количество вершин на каждом слое генерируется в соответствии с дискретным равномерным рас-

$k$	$T = 2$			$T = 5$			$T = 10$		
	$\chi_{<}$	$\chi_{=}$	$\chi_{>}$	$\chi_{<}$	$\chi_{=}$	$\chi_{>}$	$\chi_{<}$	$\chi_{=}$	$\chi_{>}$
1	4.0 (3.3)	96.0 (3.3)	0.0 (0.0)	5.2 (3.8)	94.4 (4.0)	0.4 (0.8)	5.2 (3.8)	94.4 (4.0)	0.4 (0.8)
2	7.0 (5.0)	93.0 (5.0)	0.0 (0.0)	9.2 (3.6)	87.6 (6.1)	3.2 (2.9)	9.8 (4.1)	86.0 (6.4)	4.2 (3.2)
3	9.2 (4.1)	90.8 (4.1)	0.0 (0.0)	18.2 (4.1)	76.4 (3.8)	5.4 (3.2)	24.2 (8.8)	69.6 (7.7)	6.2 (3.4)
4	10.6 (6.2)	89.4 (6.2)	0.0 (0.0)	23.0 (5.2)	68.8 (7.0)	8.2 (5.0)	31.4 (6.3)	53.2 (6.8)	15.4 (6.8)
5	14.2 (5.2)	85.8 (5.2)	0.0 (0.0)	32.2 (8.8)	57.8 (9.8)	10.0 (2.0)	44.2 (4.3)	34.0 (5.7)	21.8 (2.6)
6	15.0 (3.6)	85.0 (3.6)	0.0 (0.0)	37.6 (7.1)	50.8 (8.1)	11.6 (3.9)	45.0 (6.7)	28.0 (5.8)	27.0 (7.1)
7	15.0 (5.8)	85.0 (5.8)	0.0 (0.0)	35.4 (6.3)	53.7 (5.5)	10.9 (6.0)	50.7 (5.2)	26.5 (7.8)	22.8 (6.1)
8	14.2 (3.9)	85.8 (3.9)	0.0 (0.0)	36.6 (8.0)	50.4 (7.5)	13.0 (6.3)	48.6 (4.4)	24.8 (6.2)	26.6 (6.2)
9	16.0 (4.0)	84.0 (4.0)	0.0 (0.0)	42.4 (6.2)	47.4 (5.7)	10.2 (4.9)	57.1 (5.0)	17.3 (3.7)	25.5 (6.2)
10	20.0 (3.1)	80.0 (3.1)	0.0 (0.0)	46.4 (6.2)	42.8 (4.7)	10.8 (3.6)	61.8 (5.4)	14.3 (4.7)	23.9 (5.6)

Таблица 4: Сравнение жадной стратегии с эвристикой для тактического пользователя в послойных случайных графах. Обратная связь злоумышленника идеальна. Для каждой пары значений  $k$  и  $T$  мы приводим средние значения и стандартные отклонения  $\chi_{<}(T, k)$ ,  $\chi_{=}(T, k)$  и  $\chi_{>}(T, k)$  для 10 экспериментов со 100 тестовыми примерами.

$k$	$T = 2$			$T = 5$			$T = 10$		
	$\chi_{<}$	$\chi_{=}$	$\chi_{>}$	$\chi_{<}$	$\chi_{=}$	$\chi_{>}$	$\chi_{<}$	$\chi_{=}$	$\chi_{>}$
1	4.0 (2.2)	96.0 (2.2)	0.0 (0.0)	10.0 (3.2)	88.6 (3.0)	1.4 (0.9)	9.0 (3.6)	88.6 (3.0)	2.4 (1.5)
2	10.2 (3.3)	89.8 (3.3)	0.0 (0.0)	21.4 (5.7)	72.2 (7.2)	6.4 (4.1)	26.2 (5.4)	67.4 (6.1)	6.4 (3.4)
3	10.4 (2.8)	89.6 (2.8)	0.0 (0.0)	27.2 (5.5)	66.8 (6.1)	6.0 (3.0)	37.6 (5.5)	51.4 (5.1)	11.0 (3.9)
4	10.2 (4.7)	89.8 (4.7)	0.0 (0.0)	30.6 (5.4)	60.8 (6.9)	8.6 (4.2)	49.6 (5.1)	36.2 (7.0)	14.2 (4.4)
5	13.2 (4.5)	86.8 (4.5)	0.0 (0.0)	32.5 (7.7)	58.1 (7.7)	9.4 (3.0)	48.1 (7.9)	28.8 (4.8)	23.1 (6.0)
6	17.0 (5.0)	83.0 (5.0)	0.0 (0.0)	37.2 (5.0)	52.2 (5.5)	10.6 (6.0)	53.9 (4.6)	21.2 (6.5)	24.9 (4.4)
7	16.8 (5.2)	83.2 (5.2)	0.0 (0.0)	42.8 (5.7)	47.0 (7.4)	10.2 (3.0)	58.4 (4.8)	19.5 (5.8)	22.0 (3.4)
8	18.2 (6.8)	81.8 (6.8)	0.0 (0.0)	42.4 (6.5)	48.8 (8.8)	8.8 (3.0)	57.9 (7.4)	19.2 (6.7)	22.9 (4.8)
9	15.2 (3.7)	84.8 (3.7)	0.0 (0.0)	42.2 (5.6)	45.8 (6.3)	12.0 (4.7)	61.4 (5.0)	16.6 (6.1)	22.0 (6.0)
10	17.0 (4.6)	83.0 (4.6)	0.0 (0.0)	44.8 (5.9)	43.2 (5.5)	12.0 (4.9)	59.5 (4.2)	16.3 (5.1)	24.3 (6.1)

Таблица 5: Сравнение жадной стратегии с эвристикой для тактического пользователя в послойных случайных графах. Обратная связь злоумышленника зашумленная. Для каждой пары значений  $k$  и  $T$  мы приводим средние значения и стандартные отклонения  $\chi_{<}(T, k)$ ,  $\chi_{=}(T, k)$  и  $\chi_{>}(T, k)$  для 10 экспериментов со 100 тестовыми примерами.

пределением на интервале  $[4, 6]$ . Ребро между парой вершин из  $i$ -го и  $j$ -го слоев генерируется с вероятностью  $\frac{p}{j-i}$ , где мы устанавливаем  $p = 0, 5$ . Кроме того, стартовая вершина соединена направленным ребром со всеми вершинами в слое 2, в то время как все вершины в слое  $h - 1$  соединены с финишной вершиной. Все стоимости ребер генерируются в соответствии с дискретным равномерным распределением на интервале  $[0, 100|j - i|]$ . Наконец, мы ссылемся на раздел 4.1 в полной версии диссертации для подробного обсуждения нашего выбора параметров эвристики.

Мы устанавливаем  $k \in \{1, \dots, 10\}$ ,  $T \in \{2, 5, 10\}$  и повторяем эксперимент 10 раз. В таблице 4 мы приводим средние значения и стандартные отклонения по отношению к  $\chi_{<}(T, k)$ ,  $\chi_{=}(T, k)$  и  $\chi_{>}(T, k)$ . В таблице 5 приведены те же

результаты вычислений, предполагающие, что обратная связь зашумлена.

Основные наблюдения можно резюмировать следующим образом:

- По своей конструкции наш эвристический алгоритм всегда превосходит жадную стратегию в случае  $T = 2$ ;
- При фиксированном значении  $k$  значение  $\chi_{<}(T, k)$  имеет тенденцию расти с увеличением  $T$ . Фактически, по мере увеличения числа периодов принятия решений у тактического пользователя появляется больше возможностей улучшить свое решение.
- Значение  $\chi_{>}(T, k)$  также увеличивается в зависимости от  $T$ . Это наблюдение довольно интуитивно понятно, если вспомнить, что эвристика вычисляет решения пользователя не более чем для двух периодов принятия решений.
- Во всех случаях мы имеем, что  $\chi_{<}(T, k) > \chi_{>}(T, k)$  в среднем, что подразумевает, что пользователь должен предпочесть использование эвристики жадной стратегии.

В качестве замечания, в полной версии диссертации мы показываем, что время выполнения предлагаемого эвристического алгоритма не превышает 3 секунд (в среднем) для всех рассмотренных значений параметра  $k$ . Наконец, мы демонстрируем, что изложенные результаты довольно хорошо согласуются в отношении всех рассмотренных классов графов и типов обратной связи, полученной от пользователя злоумышленником; см. раздел 4.2 в полной версии диссертации.

## 6 Выводы

В этом тезисе мы рассматриваем проблему поиска кратчайшего пути с различными формами неопределенности. Проблема рассматривается как игра с нулевой суммой между двумя лицами, принимающими решения, а именно пользователем и злоумышленником. Пользователь перемещается между

двумя фиксированными вершинами в сети, в то время как злоумышленник контролирует либо стоимость ребер в данной сети, либо их распределение вероятностей.

В первой модели, Модели I, структура сети предполагается детерминированной, в то время как стоимости ребер/время в пути подвержены неопределенности. Для этой модели мы рассматриваем одно- и многостадийные робастно-стохастические формулировки задачи поиска кратчайшего пути (РС-ЗПК), в которых семейство распределений формируется линейными ограничениями на математическое ожидание для некоторых подмножеств ребер и индивидуальными вероятностными ограничениями для отдельных ребер. Основные результаты для Модели I можно резюмировать следующим образом:

- Мы показываем, что наши вероятностные ограничения могут быть построены и проверены с использованием неполных или частично наблюдаемых данных.
- Как для одностадийных, так и для многостадийных задач предложены эквивалентные формулировки линейного смешанно-целочисленного программирования.
- Мы демонстрируем численно, что наш подход является конкурентоспособным по сравнению с некоторыми методами робастной и робастно-стохастической оптимизации.
- Также мы показываем, что для сетей относительно небольшого размера пользователю предпочтительнее прибегать к адаптивным решениям вместо статических.

Во второй модели, Модели II, мы рассматриваем неопределенность структуры сети, предполагая, что стоимости ребер/время в пути являются детерминированными. В частности, мы рассматриваем многостадийную сетевую игру между пользователем и злоумышленником, где злоумышленник имеет неполную исходную информацию о структуре сети и стоимостях ребер. Предполагается, что злоумышленник действует жадным образом, блокируя

не более  $k$  известных ему ребер в течение одной стадии принятия решений. Наблюдая за путями, выбранными пользователем в каждом периоде, злоумышленник узнает о существовании и точных стоимостях некоторых ребер и, таким образом, может корректировать свои действия в последующих стадиях принятия решений.

Результаты для Модели II суммируются следующим образом:

- Мы анализируем точку зрения пользователя и показываем, что проблема пользователя является вычислительно сложной даже для двух эпох принятия решений, предполагая, что проблема злоумышленника в каждую эпоху принятия решений полиномиально разрешима.
- Мы выводим основные конструктивные свойства оптимальных стратегий пользователя для двух стадий принятия решений, когда у злоумышленника нет начальной информации о структуре сети.
- Мы разрабатываем новый эвристический алгоритм для пользователя с учетом произвольного временного горизонта и любой исходной информации, доступной злоумышленнику. Наши вычислительные эксперименты показывают, что предлагаемый эвристический алгоритм обычно превосходит жадную стратегию пользователя, то есть стратегию, в которой он выбирает кратчайший доступный путь в каждой стадии принятия решений.

## Список литературы

- [1] Z. Wang, K. You, S. Song, and Y. Zhang, “Wasserstein distributionally robust shortest path problem,” *European Journal of Operational Research*, vol. 284, no. 1, pp. 31–43, 2020.
- [2] D. Brownstone, A. Ghosh, T. F. Golob, C. Kazimi, and D. Van Amelsfort, “Drivers’ willingness-to-pay to reduce travel time: evidence from the san diego

- i-15 congestion pricing project,” *Transportation Research Part A: Policy and Practice*, vol. 37, no. 4, pp. 373–387, 2003.
- [3] E. Delage and Y. Ye, “Distributionally robust optimization under moment uncertainty with application to data-driven problems,” *Operations Research*, vol. 58, no. 3, pp. 595–612, 2010.
- [4] W. Wiesemann, D. Kuhn, and M. Sim, “Distributionally robust convex optimization,” *Operations Research*, vol. 62, no. 6, pp. 1358–1376, 2014.
- [5] J. Goh and M. Sim, “Distributionally robust optimization and its tractable approximations,” *Operations Research*, vol. 58, no. 4-part-1, pp. 902–917, 2010.
- [6] D. Bertsimas, M. Sim, and M. Zhang, “Adaptive distributionally robust optimization,” *Management Science*, vol. 65, no. 2, pp. 604–618, 2018.
- [7] A. Ben-Tal and A. Nemirovski, “Robust optimization—methodology and applications,” *Mathematical Programming*, vol. 92, no. 3, pp. 453–480, 2002.
- [8] A. Ben-Tal, L. El Ghaoui, and A. Nemirovski, *Robust optimization*, vol. 28. Princeton University Press, 2009.
- [9] A. Ruszczyński and A. Shapiro, “Stochastic programming models,” *Handbooks in Operations Research and Management Science*, vol. 10, pp. 1–64, 2003.
- [10] S. S. Ketkov, O. A. Prokopyev, and E. P. Burashnikov, “An approach to the distributionally robust shortest path problem,” *Computers & Operations Research*, vol. 130, p. 105212, 2021.
- [11] S. S. Ketkov, “On the multi-stage shortest path problem under distributional uncertainty,” *arXiv preprint arXiv:2205.09200*, 2022.



- [12] J. S. Borrero, O. A. Prokopyev, and D. Sauré, “Sequential shortest path interdiction with incomplete information,” *Decision Analysis*, vol. 13, no. 1, pp. 68–98, 2015.
- [13] J. S. Borrero, O. A. Prokopyev, and D. Sauré, “Sequential interdiction with incomplete information and learning,” *Operations Research*, vol. 67, no. 1, pp. 72–89, 2019.
- [14] J. Zheng and D. A. Castañón, “Dynamic network interdiction games with imperfect information and deception,” in *2012 IEEE 51st IEEE Conference on Decision and Control (CDC)*, pp. 7758–7763, IEEE, 2012.
- [15] E. Israeli and R. K. Wood, “Shortest-path network interdiction,” *Networks*, vol. 40, no. 2, pp. 97–111, 2002.
- [16] S. S. Ketkov and O. A. Prokopyev, “On greedy and strategic evaders in sequential interdiction settings with incomplete information,” *Omega*, vol. 92, p. 102161, 2020.
- [17] C. Gavriel, G. Hanasusanto, and D. Kuhn, “Risk-averse shortest path problems,” in *2012 IEEE 51st IEEE Conference on Decision and Control (CDC)*, pp. 2533–2538, IEEE, 2012.
- [18] Y. Zhang, S. Song, Z.-J. M. Shen, and C. Wu, “Robust shortest path problem with distributional uncertainty,” *IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems*, vol. 19, no. 4, pp. 1080–1090, 2017.
- [19] J. Cheng, J. Leung, and A. Lissner, “New reformulations of distributionally robust shortest path problem,” *Computers & Operations Research*, vol. 74, pp. 196–204, 2016.
- [20] K. Isii, “On sharpness of tchebycheff-type inequalities,” *Annals of the Institute of Statistical Mathematics*, vol. 14, no. 1, pp. 185–197, 1962.
- [21] A. Shapiro, “On duality theory of conic linear problems,” in *Semi-infinite Programming*, pp. 135–165, Springer, 2001.

- [22] G. A. Hanasusanto, D. Kuhn, and W. Wiesemann, “K-adaptability in two-stage distributionally robust binary programming,” *Operations Research Letters*, vol. 44, no. 1, pp. 6–11, 2016.
- [23] R. Jiang and Y. Guan, “Risk-averse two-stage stochastic program with distributional ambiguity,” *Operations Research*, vol. 66, no. 5, pp. 1390–1405, 2018.
- [24] M. Dyer and L. Stougie, “Computational complexity of stochastic programming problems,” *Mathematical Programming*, vol. 106, no. 3, pp. 423–432, 2006.
- [25] X. Yu and S. Shen, “Multistage distributionally robust mixed-integer programming with decision-dependent moment-based ambiguity sets,” *Mathematical Programming*, pp. 1–40, 2020.
- [26] J. A. Sefair and J. C. Smith, “Dynamic shortest-path interdiction,” *Networks*, vol. 68, no. 4, pp. 315–330, 2016.
- [27] D. Bertsimas and I. Dunning, “Multistage robust mixed-integer optimization with adaptive partitions,” *Operations Research*, vol. 64, no. 4, pp. 980–998, 2016.
- [28] N. B. Dimitrov and D. P. Morton, “Interdiction models and applications,” in *Handbook of operations research for homeland security*, pp. 73–103, Springer, 2013.
- [29] J. C. Smith and C. Lim, “Algorithms for network interdiction and fortification games,” in *Pareto optimality, game theory and equilibria* (A. Chinchuluun, P. M. Pardalos, A. Migdalas, and L. Pitsoulis, eds.), pp. 609–644, Springer, 2008.
- [30] J. C. Smith, M. Prince, and J. Geunes, “Modern network interdiction problems and algorithms,” in *Handbook of combinatorial optimization* (P. M. Pardalos, D.-Z. Du, and R. L. Graham, eds.), pp. 1949–1987, Springer, 2013.

- [31] J. C. Smith and Y. Song, “A survey of network interdiction models and algorithms,” *European Journal of Operational Research*, 2019. to appear.
- [32] R. K. Wood, “Bilevel network interdiction models: Formulations and solutions,” in *Wiley Encyclopedia of Operations Research and Management Science* (J. J. Cochran, L. A. C. Jr., P. Keskinocak, J. P. Kharoufeh, and J. C. Smith, eds.), pp. 1–11, John Wiley & Sons, Inc, 2010.
- [33] F. Pan and D. P. Morton, “Minimizing a stochastic maximum-reliability path,” *Networks: An International Journal*, vol. 52, no. 3, pp. 111–119, 2008.
- [34] U. Janjarassuk and J. Linderoth, “Reformulation and sampling to solve a stochastic network interdiction problem,” *Networks*, vol. 52, no. 3, pp. 120–132, 2008.
- [35] M. V. Nehme, *Two-person games for stochastic network interdiction: models, methods, and complexities*. The University of Texas at Austin, 2009.
- [36] P. M. Esfahani and D. Kuhn, “Data-driven distributionally robust optimization using the wasserstein metric: Performance guarantees and tractable reformulations,” *Mathematical Programming*, vol. 171, no. 1-2, pp. 115–166, 2018.
- [37] G. Bayraksan and D. K. Love, “Data-driven stochastic programming using phi-divergences,” in *The Operations Research Revolution*, pp. 1–19, INFORMS, 2015.
- [38] M. De Berg, M. Van Kreveld, M. Overmars, and O. Schwarzkopf, “Computational geometry,” in *Computational geometry*, pp. 1–17, Springer, 1997.
- [39] W. Hoeffding, “Probability inequalities for sums of bounded random variables,” in *The collected works of Wassily Hoeffding*, pp. 409–426, Springer, 1994.

- [40] D. Bertsimas and M. Sim, “Robust discrete optimization and network flows,” *Mathematical Programming*, vol. 98, no. 1-3, pp. 49–71, 2003.
- [41] D. Bertsimas, K. Natarajan, and C.-P. Teo, “Probabilistic combinatorial optimization: Moments, semidefinite programming, and asymptotic bounds,” *SIAM Journal on Optimization*, vol. 15, no. 1, pp. 185–209, 2004.
- [42] D. Bertsimas and A. Georghiou, “Design of near optimal decision rules in multistage adaptive mixed-integer optimization,” *Operations Research*, vol. 63, no. 3, pp. 610–627, 2015.
- [43] K. Postek and D. d. Hertog, “Multistage adjustable robust mixed-integer optimization via iterative splitting of the uncertainty set,” *INFORMS Journal on Computing*, vol. 28, no. 3, pp. 553–574, 2016.
- [44] C.-L. Li, S. Thomas McCormick, and D. Simchi-Levi, “Finding disjoint paths with different path-costs: Complexity and algorithms,” *Networks*, vol. 22, no. 7, pp. 653–667, 1992.
- [45] P. Erdős and A. Rényi, “On random graphs,” *Publicationes Mathematicae Debrecen*, vol. 6, pp. 290–297, 1959.
- [46] A.-L. Barabási and R. Albert, “Emergence of scaling in random networks,” *Science*, vol. 286, no. 5439, pp. 509–512, 1999.